समतल त्रिकोणमिति

(इण्टरमीडियेट के लिये)

डा० एम० रे, डी० एस-सी०

प्रोफेसर तथा अध्यक्ष गणित-विभाग, आगरा कालेज, आगरा

रमाकान्त चतुर्वेदी, एम० एस-सी०, बी० एस-सी (ऑनर्स)

गणित-विभाग, आगरा कालेज, आगरा

हरस्वरूप शर्मा, एम० ए०

गणित-विभाग, आगरा कालेज आगरा

प्रकाशक—गयाप्रसाद एण्ड सन्स, आगरा

मुद्रक
जगदीशप्रसाद अग्रवाल, एम० ए०, बी०-कॉम०
दी एज्यूकेशनल प्रेस, आगरा

विषय-सूची

त्रिकोणमिति

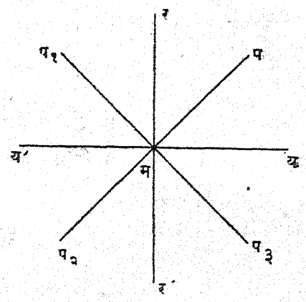
अध्याय १

कोण तथा उनकी मापें

(Angles and their Measurements)

(१) त्रिकोणमिति गणित शास्त्र की वह शाखा है जो उसके शाब्दिक अर्थ के अनुसार **त्रिकोण** अर्थात् त्रिभुज की भुजा एवं कोण की **मिति** अर्थात् माप निकालने की रीति को बतलाती है। प्राचीन समय में लोग इस विषय को लेकर इसके प्रयोग को केवल यहीं तक सीमित रखते थे; किन्तु इस समय त्रिकोणमिति शास्त्र का प्रयोग कुछ विस्तृत रूप से होने लगा है। अब उन कोणों का भी विवेचन किया जाता है जो १८०° से अधिक हैं। इसके अतिरिक्त त्रिकोणमिति का प्रयोग कुछ बीजगणित के समीकरणों को हल करने तथा गणित की कुछ विशेष शाखाओं में भी होने लगा है।

(२) **कोण**—भूमिति में कोण एक ही विन्दु पर मिलने वाली दो सरल रेखाओं से बनता है जिसे सदैव धनात्मक माना गया है तथा जिसका न्यूनतम मान ०° तथा अधिकतम मान ३६०° होता है, किन्तु त्रिकोणमिति में कोणों को किसी प्रकार सीमाबद्ध नहीं किया गया। त्रिकोणमिति में कोण एक सरल रेखा द्वारा उसके एक विन्दु पर एक ही समतल में चक्कर लगाने से बनता है।



मानलो य′ म य और र म र′ दो सीधी रेखाएँ एक दूसरे को समकोण पर काटती हैं और इस प्रकार समतल को चार भागों में विभाजित करती हैं। मप कोई भ्रामक रेखा (revolving line) जिसका आदि स्थान (initial position) म य है, म विन्दु के चारों ओर वामवर्त्त (anti-clockwise) घूमती है। म $प_1$, म $प_2$, म $प_3$ मार्ग में इस रेखा की अन्य स्थितियाँ हैं। म य और म र के बीच में कोण प म य एक समकोण से कम है; म र और म य′ के बीच में इस रेखा की स्थिति से उत्पन्न कोण $प_1$म य एक समकोण से अधिक और दो समकोण से कम है; म य′ और म र′ के बीच में इस कोण की स्थिति से उत्पन्न कोण दो समकोण से अधिक और तीन समकोण से कम है। इसी प्रकार म र′ और म य के बीच में इस रेखा की स्थिति से उत्पन्न कोण तीन समकोण से अधिक और चार समकोण से कम है। यदि म प रेखा म विन्दु का एक पूरा चक्कर लगाकर म य **आदि रेखा** (initial line) को पार करके आगे घूमती रहे तो म र और म य के बीच में म प की स्थति से उत्पन्न कोण ४ समकोण से बड़ा और ५ समकोण से छोटा होगा। इसी प्रकार दो चक्कर लगाने के पश्चात् म र और म य के बीच में म प की स्थिति से उत्पन्न कोण ८ समकोण से बड़ा और ६ समकोण से छोटा होगा।

यदि म प रेखा आदि स्थान म य से दक्षिणावर्त्त (clockwise) घूमे तो ∠य म $प_3$ को ऋणात्मक (negative) कहते हैं। इस प्रकार—६०° और +३००° पर म प की स्थिति एक ही होगी।

अतः त्रिकोणमिति में कोण धनात्मक, ऋणात्मक एवं किसी भी परिमाण का हो सकता है।

उपर्युक्त चित्र में विभाजित किये हुए चारों भाग य म र, र म य′, य′म र′, र′ म य क्रमशः प्रथम पाद, द्वितीय पाद, तृतीय पाद, चतुर्थ पाद कहलाते हैं।

उदाहरण—भ्रामक रेखा (revolving line) की स्थिति बताओ जब कि उसने निम्नलिखित कोण बनाये हों :—

(क) १९९° (ख) ५६०° (ग) १२६०° (घ)—३५६०°

(क) १९९° = १८०° + १९° अतः भ्रामक रेखा तृतीय पाद में है।

(ख) ५६०° = ३६०° + १८०° + २०° अतः भ्रामक रेखा तृतीय पाद में है।

(ग) १२६०° = ३ × ३६०° + १८०° अतः भ्रामक रेखा ने तीन चक्कर लगाने के पश्चात् दो समकोण बना दिये हैं जिससे वह म य′ रेखा पर सन्निपतित है।

(घ)—३५६०° = —१० × ३६०° + ४०° अतः भ्रामक रेखा ने १० दक्षिणावर्त्त चक्कर लगाकर फिर ४०° का कोण बनाया है जिससे उसकी स्थिति प्रथम पाद में है।

(३) कोणों की माप—कोणों को मापने के लिए समकोण को इकाई माना गया है, किन्तु समकोण एक बहुत बड़ी इकाई है। अतः गणितज्ञों ने इसे भी छोटे छोटे भागों में बाँट कर नयी इकाइयां निकाल ली हैं। इन इकाइयों की मुख्य तीन पद्धतियां हैं—

(१) षट् दशांशक पद्धति (Sexagesimal system)

(२) शतांशक पद्धति (Centesimal system)

(३) वृत्तीय अथवा चापीय पद्धति (Circular system)

(४) **षट् दशांशक पद्धति***—इस पद्धति के अनुसार एक समकोण के ६० सम भाग किये जाते हैं और प्रत्येक भाग को **अंश** (degree) कहते हैं। एक अंश को फिर ६० बराबर भागों में बांटते हैं और प्रत्येक भाग को **कला** (minute) कहते हैं। प्रत्येक कला फिर ६० बराबर भागों में बाँटी जाती है और प्रत्येक भाग को **विकला** (second) कहते हैं। अंश, कला और विकला के क्रमशः चिन्ह $^\circ$, $'$, $''$ होते हैं।

१ समकोण = ९०$^\circ$ (अंश)
१$^\circ$ = ६०$'$ (कला)
१$'$ = ६०$''$ (विकला)

इस पद्धति में माप की इकाई एक अंश होता है।

(५) **शतांशक पद्धति**† इस पद्धति के अनुसार एक समकोण के १०० समान भाग किये जाते हैं, प्रत्येक भाग को ग्रेड grade कहते हैं। एक ग्रेड को १०० बराबर भागों में बांटते हैं और प्रत्येक भाग को **कला** (minute) कहते हैं। प्रत्येक कला फिर १०० बराबर भागों में बांटी जाती है और प्रत्येक भाग को **विकला** (second) कहते हैं। ग्रेड, कला और विकला के क्रमशः चिन्ह ग, `, " होते हैं।

अतः १ समकोण = १००^{ग} (ग्रेड)
१^{ग} = १००` (कला)
१` = १००" (विकला)

इस पद्धति में माप की इकाई ग्रेड होता है।

---

*इसे साधारण अथवा अंग्रेजी पद्धति भी कहते हैं।

†इसे फ्रांसीसी पद्धति भी कहते हैं।

(६) किसी कोण की माप का एक पद्धति से दूसरी में परिवर्त्तन

षट्दशांशक पद्धति मे १ समकोण $= ९०^\circ$

और शतांशक पद्धति में १ समकोण $= १००^{ग}$

अतः $$९०^\circ = १००^{ग}$$

$$१^\circ = \frac{१०}{९}^{ग}$$

$$= \left(१ + \frac{१}{९}\right)^{ग}$$

और $$१^{ग} = \left(\frac{९}{१०}\right)^\circ$$

$$= \left(१ - \frac{१}{१०}\right)^\circ$$

उदाहरण १. ५४° को शतांशक पद्धति में बदलो।

$$५४^\circ = \left(५४ + \frac{५४}{९}\right)^{ग}$$

$$= ६०^{ग}$$

उदाहरण २. $३५^\circ\ ४७'१५''$ को शतांशक पद्धति में बदलो।

$$१५'' = .२५'$$

$$४७'१५'' = ४७.२५'$$

$$= \frac{४७.२५}{६०}^\circ$$

$$= .७८७५^\circ$$

$$३५^\circ ४७'१५'' = ३५.७८७५^\circ$$

$$= \frac{३५.७८७५}{९०} \text{ समकोण}$$

$= .३९७६३८८\cdots\cdots$ समकोण

$= ३९.७६३८८\cdots^{ग}$

$= ३९^{ग}\ ७६.३८८\cdots'$

$= ३९^{ग}\ ७६'\ ३८.८''\cdots$

उदाहरण—$४५^{ग}\ ३५'\ २४''$ को षट् दशांशक पद्धति में परिवर्तित करो।

$४५^{ग}\ ३५'\ २४'' = .४५३५२४$ समकोण

$$\begin{array}{r} ९० \\ \hline ४०.८१७१६ \text{ अंश} \\ ६० \\ \hline ४०^{\circ}\ ४९.०२९६ \\ ६० \\ \hline ४०^{\circ}\ ४९'\ १.७७६'' \end{array}$$

$\therefore\ ४५^{ग}\ ३५'\ २४'' = ४०^{\circ}\ ४९'\ १.७७६''$

उदाहरण ४—सिद्ध करो कि किसी कोण की षट्दशांशक और शतांशक कलाओं की संख्या में २७ : ५० का अनुपात होता है।

मान लो कि षट्दशांशक कलाओं की संख्या य और शतांशक कलाओं की संख्या र है

$$\text{अतः } य' = \left(\frac{य}{६०}\right)^{\circ} = \frac{य}{६० \times ९०} \text{ समकोण}$$

$$र' = \left(\frac{र}{१००}\right)^{ग} = \frac{र}{१०० \times १००} \text{ समकोण}$$

$$\therefore \frac{य}{६० \times ६०} = \frac{र}{१०० \times १००}$$

$$\frac{य}{र} = \frac{६० \times ६०}{१०० \times १००}$$

$$= \frac{२७}{७५}$$

य : र :: २७ : ५०

अभ्यास १

भ्रामक रेखा की स्थित कहाँ होगी यदि उसने निम्न कोण बनाये हों :—

(१) २७०° (२) ३२७° (३) ३५°

(४) ११२२° (५) —६१५° २६′ (६) ३२५ ^{ग}

निम्नलिखित कोणों का मान एक समकोण में बताओ :—

(७) ३०° (८) ७५° (९) ६० ^{ग} (१०) २१०° १३′ ३०″

(११) ६५ ^{ग} २०′ ४५″ (१२) १० ८० ^{ग} ३६′ ४६″

निम्नलिखित कोणों को शतांशक पद्धति में परिवर्तित करो :—

(१३) ४०° (१४) ७५° (१५) ६३° २२′ ४०.८″

(१६) ४२५° १५′ (१७) ३५° ४७′ १५″ (१८) ४६° ४३′ ३०″

निम्नलिखित कोणों को षट्‌दशांशक पद्धति में बदलो :—

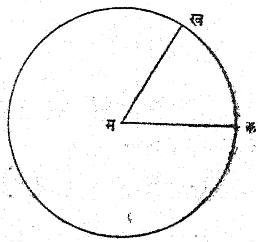
(१९) ५० ^{ग} (२०) ४६ ^{ग} ६२′ ७३″ (२१) २०३ ^{ग} ५८′ ७३″

(२२) १०६ ^{ग} ७४′ २५″ (२३) ७५ ^{ग} ७५′ ७५″ (२४) २० ^{ग} १४′ १५″

(२५) सिद्ध करो कि किसी कोण की षट्‌दशांशक एवं शतांशक विकलाओं की संख्याओं में ८१ : २५० का अनुपात होता है।

(७) वृत्तीय पद्धति—(Circular system) इस पद्धति में कोण के माप की इकाई **रेडियन** मानी गयी है। यह वह कोण है जो किसी वृत्त के केन्द्र पर उसके उस चाप द्वारा बनता है जिसकी माप उस वृत्त की त्रिज्या के बराबर हो।

मान लो क ख, म केन्द्र के वृत्त का ऐसा चाप है जिसकी लम्बाई उस वृत्त की त्रिज्या म क के बराबर है।

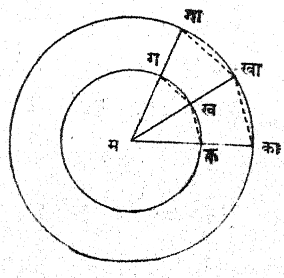


अतः क ख चाप द्वारा वृत्त के केन्द्र म पर स्थित कोण ख म क वृत्तीय माप की इकाई अर्थात् **रेडियन है,** जिसे संक्षेप में $१^{व}$ लिखते हैं। अंग्रेजी में इसे 1^c लिखा जाता है।

आगे हम यह सिद्ध करेंगे कि इस रेडियन का मान सदैव नियत परिमाण का होता है तथा वृत्तों की त्रिज्याओं की लम्बाइयों पर निर्भर नहीं रहता।

(८) साध्य—वृत्त की परिधि और उसके व्यास की निष्पत्ति सभी वृत्तों के लिए एक ही होती है।

मान लो कि म केन्द्र के एककेन्द्रिक दो वृत्त हैं। बड़े वृत्त में स संख्या की भुजा का एक समबहुभुज (regular polygon) का खा गा......बनाओ। म का, म खा, म गा......को मिलाओ। माना ये छोटे वृत्त को क्रमशः क, ख, ग,......विन्दु पर काटते हैं, क ख, ख ग......का खा, खा गा......को मिलाओ।



$$\text{चूँकि } \frac{\text{म क}}{\text{म का}} = \frac{\text{म ख}}{\text{म खा}} = \frac{\text{म ग}}{\text{म गा}} = \ldots\ldots = \ldots\ldots = \ldots\ldots =$$

$$= \frac{\text{क ख}}{\text{का खा}} = \frac{\text{ख ग}}{\text{खा गा}} = \ldots\ldots = \ldots\ldots = \ldots\ldots = \ldots\ldots =$$

तथा क ख ‖ का खा, ख ग ‖ खा गा.........

अतः लघुवृत्त में क ख ग...भी एक समबहुभुज क्षेत्र हुआ

∴ बड़े समबहुभुज क्षेत्र की परिसीमा = स. का खा

छोटे सम बहुभुज क्षेत्र की परिसीमा = स. क ख

$$\therefore \frac{\text{बड़े समबहुभुज क्षेत्र की परिसीमा}}{\text{छोटे समबहुभुज की परिसीमा}} = \frac{\text{स का खा}}{\text{स क ख}}$$

$$= \frac{\text{का खा}}{\text{क ख}}$$

$$= \frac{\text{म का}}{\text{म क}}$$

यदि इन समबहुभुज क्षेत्रों की भुजाओं की संख्याओं को अपरिमित रूप से बढ़ा दिया जाय तो इन बहुभुज क्षेत्रों की परिसीमा क्रमशः बड़े वृत्त एवं छोटे वृत्त की परिधि हो जायगी।

$$\therefore \frac{\text{बड़े वृत्त की परिधि}}{\text{छोटे वृत्त की परिधि}} = \frac{\text{म का}}{\text{म क}} = \frac{\text{बड़े वृत्त की त्रिज्या}}{\text{छोटे वृत्त की त्रिज्या}}$$

$$\text{अथवा } \frac{\text{बड़े वृत्त की परिधि}}{\text{बड़े वृत्त की त्रिज्या}} = \frac{\text{छोटे वृत्त की परिधि}}{\text{छोटे वृत्त की त्रिज्या}}$$

अतः $\frac{\text{किसी वृत्त की परिधि}}{\text{उसी वृत्त की त्रिज्या}}$ का मान सभी वृत्तों के लिये एकसा होता है।

चूंकि व्यास त्रिज्या का दूना होता है अतः यह सिद्ध हुआ कि वृत्त की परिधि और व्यास की निष्पत्ति एक ही होती है।

इस निष्पत्ति को यूनानी अक्षर π (पाई) के द्वारा प्रदर्शित किया जाता है। π के मान को किसी भिन्न अथवा पूर्णाङ्क से नहीं दर्शाया जा सकता है। दो दशमलव तक π का ठीक मान $\frac{२२}{७}$ है, इससे अधिक उत्तम मान $\frac{३५५}{११३}$ है; इससे भी अधिक उत्तम मान

८ दशमलव स्थान तक ३.१४१५६२६५···और २० दशमलव स्थान तक ३. १४१५६२६५३५८९७ ९३२३८४६ होता है।

एक गणितज्ञ ने इसका मान ७०७ दशमलव अङ्कों तक निकाला है। $\frac{१}{\pi}$ का भी मान सात दशमलव स्थान तक ·३१८३०९९ निकाला गया है।

(९) साध्य—सिद्ध करो कि रेडियन नियत परिमाण का कोण होता है।

मान लो कि सूक्त (७) के चित्र में दिये हुये वृत्त की त्रिज्या त्र है और चाप (arc) क ख की लम्बाई त्रिज्या त्र के बराबर है।

अतः कोण ख म क = १ रेडियन

चूँकि हम भूमिति से जानते हैं कि किसी वृत्त के केन्द्र पर स्थित कोणों में वही अनुपात होता है जो उनके बनाने वाले चापों में होता है,

$$\text{अतः} \quad \frac{\text{चाप क ख}}{\text{परिधि}} = \frac{\angle \text{ख म क}}{\text{४ समकोण}}$$

$$\text{अथवा} \quad \frac{\text{त्र}}{२\pi\text{त्र}} = \frac{\text{१ रेडियन}}{\text{४ समकोण}} \qquad (१)$$

$$\therefore \text{१ रेडियन} = \frac{४ \times ९०^\circ}{२\pi} = \frac{१८०^\circ}{\pi} = \frac{१८०^\circ \times \frac{१}{\pi}}{}$$

$$= १८०^\circ \times .३१८३०९८८६२$$

$$= ५७.२९५७७९५^\circ$$

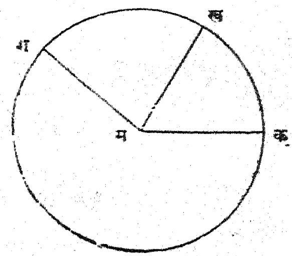
$$= ५७^\circ\ १७'\ ४४.८'' \qquad \text{लगभग}$$

(१) से १ समकोण $= \frac{१}{२}\pi$ रेडियन $= \frac{१}{२}\pi^{\text{व}}$

टिप्पणी—अभ्यास में अब गणितज्ञों ने π के ऊपर व लिखना छोड़ दिया है अतः यदि कहीं पर π के ऊपर व न लिखा हो तो एकदम इसे रेडियन ही समझ लेना चाहिये।

(१०) **परिभाषा**—किसी कोण की वृत्तीय माप (circular measure) उसके रेडियनों की संख्या के बराबर होती है।

(११) एक कोण की वृत्तीय माप किसी वृत्त के केन्द्र पर उतना ही कोण बनाने वाले चाप और उसकी त्रिज्या की निष्पत्ति के बराबर होती है।



मान लो ग म क एक कोण है। म को केन्द्र मानकर किसी त्रिज्या का एक वृत्त खींचो जो कि इस कोण की भुजाओं को ग और क बिन्दु पर काटे।

म क त्रिज्या के बराबर क ख चाप काटो अतः कोण ख म क एक रेडियन हुआ।

$$\therefore \frac{\angle \text{ग म क}}{\angle \text{ख म क}} = \frac{\text{चाप ग क}}{\text{चाप ख क}} = \frac{\text{चाप ग क}}{\text{त्रिज्या}}$$

$$\therefore \angle \text{ग म क} = \frac{\text{चाप ग क}}{\text{त्रिज्या}} \times १ \text{ रेडियन}$$

$$= \frac{\text{चाप ग क}}{\text{त्रिज्या}} \text{ रेडियन}$$

(१२) वृत्तीय पद्धति से शतांशक एवं षट्दशांशक पद्धति में पारस्परिक परिवर्त्तन।

उदाहरण १—**३७° ४५′** का वृत्तीय माप में परिवर्त्तन करो।

हम ऊपर दिखा चुके हैं कि

$$२ \text{ समकोण} = १८०^{\circ} = २००^{ग} = \pi^{व}$$

$$३७^{\circ}\ ४५' = ३७.७५^{\circ}$$

$$= \frac{३७.७५ \times \pi}{८०}$$

$$= \cdot २०९७\ \pi \text{ रेडियन}$$

उदाहरण २—$७६३^{ग}\ २५'\ ३६''$ वृत्तीय पद्धति में बदलो।

$$७६३^{ग}\ २५'\ ३६'' = ७६३.२५३६^{ग}$$

$$= \frac{७६३.२५३६}{२००}\pi \text{ रेडियन}$$

$$= ३.८१६२६८\ \pi \text{ रेडियन}$$

उदाहरण ३—१० π को शतांशक पद्धति में परिवर्त्तित करो

$$\therefore \pi \text{ रेडियन} = २००^{ग}$$

$$१०\ \pi \quad = २०००^{ग}$$

उदाहरण ४—दो कोणों का अन्तर १° है। उनके योग की वृत्तीय माप $१^{व}$ है;. तो छोटे कोण की वृत्तीय माप बताओ। (दिल्ली १६४१)

मान लो कि दोनों कोणों की वृत्तीय माप क्रमशः य और र हैं

$$\therefore य - र = \frac{\pi}{१८०}$$

$$य + र = १$$

$$\therefore \quad २\ र = १ - \frac{\pi}{१८०}$$

$$र = \tfrac{१}{२}\left(१ - \frac{\pi}{१८०}\right)$$

उदाहरण ५—किसी त्रिभुज के कोण समान्तर श्रेणी (A. P.) में हैं। सबसे छोटे कोण में रेडियन की संख्या तथा मध्य के कोण में अंशों की संख्या में १ : १२० का अनुपात है, तो अंशों में उन कोणों को बताओ।

समान्तर श्रेणी में होने के कारण मान लो वे $(य-र)^\circ$, $य^\circ$, $(य+र)^\circ$ हैं

$\therefore १८०^\circ = य - र + य + य + र$

$\therefore य = ६०^\circ$

अतः इष्ट कोण $(६० - र)^\circ$, ६०°, और $(६० + र)^\circ$ हैं

$$(६० - र)^\circ = \frac{६० - र}{१८०}\pi$$

$$\therefore \frac{\frac{६० - र}{१८०}\pi}{६०} = \frac{१}{१२०}$$

अथवा $(६० - र)\pi = ६०$

$$र = ६० - \frac{६०}{\pi}$$

$$\therefore य - र = ६०^\circ - \left(६० - \frac{६०}{\pi}\right)^\circ$$

$$= \left(\frac{६०}{\pi}\right)^\circ$$

$$\therefore \text{तीसरा कोण} = ६०^\circ + ६०^\circ - \left(\frac{६०}{\pi}\right)^\circ$$

$$= १२०^\circ - \left(\frac{६०}{\pi}\right)^\circ$$

अतः कोण क्रमशः $\left(\frac{६०}{\pi}\right)^\circ, ६०^\circ, \quad १२०^\circ - \frac{६०^\circ}{\pi}$ हैं

उदाहरण ६—१० फीट की त्रिज्या के वृत्त में उस चाप की क्या लम्बाई होगी जो कि केन्द्र पर $४६^\circ \; ३०'$ का कोण बनाता है।

मान लो उस चाप की लम्बाई य है

अतः सूत्र ११ से $\frac{य}{१०} = ४६^\circ \; ३०'$ में रेडियन की संख्या

$$= \frac{९९}{२} \cdot \frac{\pi}{१८०}$$

$$= \frac{९९}{३६०} \pi$$

$$\therefore य = \frac{११}{४} \pi$$

उदाहरण ७—एक खम्भा १०० फीट की दूरी पर खड़े हुये आदमी की आँख पर ६′ का कोण बनाता है, तो खम्भे की ऊँचाई बताओ।

मान लो कि खम्भे की ऊँचाई य है

य लगभग उस वृत्त के चाप के बराबर है जिसकी त्रिज्या १०० फीट है और चाप उसके केन्द्र पर ६′ का कोण बनाता है।

$$\text{अतः } \frac{य}{१००} = ६' \text{ में रेडियनों की संख्या}$$

$$= \frac{६}{६०} \times \frac{\pi}{१८०}$$

$$\therefore य = \frac{६\pi \times १००}{६० \times १८०}$$

$$= \frac{\pi}{१८}$$

$$= \frac{११}{६३} \text{ फीट}$$

अभ्यास २

१—रेल के एक पहिये का अर्धव्यास १ फुट ६ इं० है। यदि वह एक सेकिन्ड में तीन चक्कर काटे तो रेल की चाल बताओ।

२—निम्नलिखित कोणों को अंश, कला और विकलाओं में परिवर्तित करो :—

(क) $८^{व}$ (ख) $१०\pi^{व}$ (ग) $\frac{१५}{४}\pi^{व}$

३—निम्नलिखित कोणों को रेडियन में परिवर्त्तित करो :—

(क) ६०° (ख) $१३०^{ग}$ (ग) $२५०^{ग}$ $२०'$ $३०''$

४—किसी त्रिभुज के तीनों कोण क्रमशः $\frac{१}{३}$ $य^{\circ}$, $\frac{५}{६}$ $य^{ग}$, $\frac{३}{५}$ πय हैं तो उनका मान बताओ।

५—किसी त्रिभुज के कोण समान्तर श्रेणी (A. P.) में हैं। यदि उनमें से एक ३०° का हो तो सिद्ध करो कि वह समकोण त्रिभुज है।

६—चार फीट के व्यास के पहिये की रिम में १५ तानें बराबर बराबर की दूरी पर लगी हुई हैं जो कि उसके केन्द्र पर जाकर मिलती हैं। तो बताओ कि पहिये की परिधि पर ये तानें कितनी कितनी दूरी पर लगी हुई हैं ?

७—किसी त्रिभुज के दो न्यून कोणों का अन्तर $\frac{\pi}{४}^{व}$ है। उसके अधिक कोण एवं सबसे छोटे कोण का योग $\frac{३}{५}\pi^{व}$ है तो उन्हें बताओ।

८—यदि दो कोणों का योग ३ रेडियन और अन्तर १०° हो तो उन्हें बताओ, ($\pi = \frac{३५५}{११३}$)

९—तीन फीट की त्रिज्या के वृत्त के केन्द्र पर ४ फीट के चाप द्वारा कितना कोण बनेगा ?

१०—किसी त्रिभुज के कोण समान्तर श्रेणी में हैं। यदि सबसे बड़े कोण के रेडियन एवं सबसे छोटे कोण के ग्रेडों की संख्या में $\pi : ४०$ का अनुपात हो तो उन कोणों को अंशों में बताओ।

११—किसी चतुर्भुज के कोण समान्तर श्रेणी (A. P.) में हैं। यदि सबसे बड़ा कोण सबसे छोटे कोण से दूना हो तो सबसे छोटे कोण का मान रेडियन में कितना होगा ?

[संकेत—कोणों को क्रमशः य—३र, य—र, य+र, य+३र माना जो कि समान्तर श्रेणी में हैं]

१२—दो समबहुभुज क्षेत्र की भुजाओं में ५ और ४ का सम्बन्ध है। यदि उनके संगती कोणों में ६° का अन्तर हो तो उन क्षेत्रों की भुजाओं की संख्या बताओ।

१३—दो समबहुभुज क्षेत्र की भुजाओं में क और ख का सम्बन्ध है। यदि पहिले के एक कोण के अंशों की संख्या दूसरे के एक कोण के ग्रेडों की संख्या के बराबर हो, तो उन क्षेत्रों की भुजाओं की संख्या बताओ।

१४—११०° २०′ को ऐसे दो भागों में विभक्त करो कि एक की षटदशांशक विकलाओं की संख्या दूसरे की शतांशक विकलाओं की संख्या के बराबर हो।

१५—आठ फीट के व्यास के वृत्त के केन्द्र पर उसका १० फीट लम्बा एक चाप १४३° १४′ २२″ का कोण बनाता है, तो π का मान (३ दशमलव तक) बताओ।

१६—यदि पृथ्वी का अर्द्ध व्यास ४००० मील हो तो उसके पृष्ठतल पर पड़ा हुआ १ मील लम्बा तार उसके केन्द्र पर कितना कोण बनायेगा ?

१७—यदि ६६·१ मील लम्बी सीधी सड़क द्वारा पृथ्वी के केन्द्र पर १° का कोण बनता हो तो पृथ्वी की त्रिज्या बताओ।

१८—किसी वृत्ताकार रास्ते पर एक मनुष्य ३० मील प्रति घंटे की चाल से २० सेकिन्ड दौड़कर रुक जाता है। यदि उसके दौड़े हुए चाप से केन्द्र पर ३६° का कोण बनता हो तो दौड़े हुए रास्ते की लम्बाई बताओ।

१९—पृथ्वी की त्रिज्या चन्द्रमा पर ५७′ का कोण बनाती है तो पृथ्वी से चन्द्रमा की दूरी बताओ। [पृथ्वी की त्रिज्या = ३९६० मील]

२०—पृथ्वी, सूर्य को केन्द्र मानकर, उसके चारों ओर गोलाकार चक्कर काटती है; यदि उसका मार्ग ५८१,१६४,६४० मील लम्बा हो तो पृथ्वी से सूर्य की दूरी बताओ।

२१—एक पहिया एक विकला में ३०० चक्कर लगाता है। बताओ कि एक रेडियन कितने समय में घूमता है?

२२—दो वृत्त की त्रिज्याओं में १ और ५ की निष्पत्ति है, उनकी परिधि पर बराबर के चाप लिये गये हैं। यदि छोटे वृत्त का चाप केन्द्र पर ३०° का कोण बनाता हो तो बड़े वृत्त के चाप द्वारा केन्द्र पर कितना कोण बनेगा?

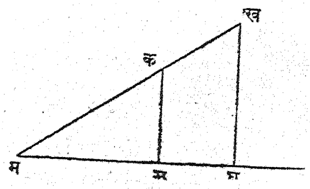
२३—एक समकोण त्रिभुज के न्यून कोण ख° ख′ और ख′ हों तो ख का मान बताओ।

२४—किसी त्रिभुज के कोण समान्तर श्रेणी में हैं। बड़े कोण के अंशों की संख्या एवं शेष कोणों के योग में रेडियन की संख्या में ४५० : ११ की निष्पत्ति है। अंशों में त्रिभुज के कोणों को बताओ।

अध्याय २

त्रिकोणमितीय निष्पत्तियाँ

(Trigonometrical Ratios)



(१३) यदि किसी कोण म की एक भुजा पर क और ख कोई दो बिन्दु लेकर दूसरी भुजा पर क ग और ख घ लम्ब गिराये जायँ तो क ग और ख ग समानान्तर होने के कारण त्रिभुज म क ग और म ख घ समान-कोणिक (equi-angular) होंगे और उन त्रिभुजों की संगती भुजायें भी समानुपाती (proportional) होंगी।

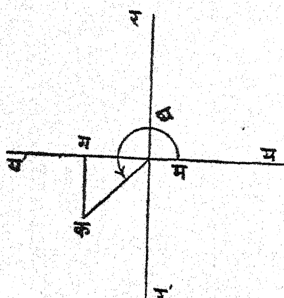
अतः

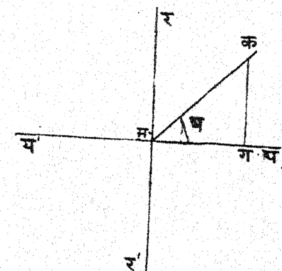
$$\frac{म\,ग}{म\,क} = \frac{म\,घ}{म\,ख}$$

$$\frac{क\,ग}{म\,क} = \frac{ख\,घ}{म\,ख}$$

$$\frac{ग\,क}{ग\,म} = \frac{ख\,घ}{म\,घ}$$

(१४)





मान लो कि भ्रामक रेखा (revolving line) म क अपने आदि स्थान (initial position) म य से घूमना प्रारम्भ करके कोण क म य (= थ) बनाती है।

म क के किसी बिन्दु क से म य पर क ग लम्ब डालो (यदि आवश्यकता हो तो म य को बढ़ा लो) इस प्रकार क म ग एक समकोण त्रिभुज बन गया। इस त्रिभुज में कोण थ के सामने की भुजा क ग को **लम्ब**, म ग को **आधार** और म क को **कर्ण** कहते हैं।

निष्पत्ति $\frac{\text{क ग}}{\text{म क}} = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}}$ को कोण थ की **ज्या** (sine) कहते हैं और इसका संक्षेप में ज्या थ ($\sin\theta$) कर के लिखते हैं।

निष्पत्ति $\frac{\text{म ग}}{\text{म क}} = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}}$ को कोण थ की **कोटिज्या** (cosine) कहते हैं और इसको संक्षेप में कोज्या थ ($\cos\theta$) करके लिखते हैं।

निष्पत्ति $\frac{\text{क ग}}{\text{म ग}} = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}}$ को कोण थ की **स्पर्शज्या** (tangent) कहते हैं और इसको संक्षेप में स्प थ ($\tan\theta$) करके लिखते हैं।

निष्पत्ति $\frac{\text{म ग}}{\text{क ग}} = \frac{\text{आधार}}{\text{लम्ब}}$ को कोण थ की **कोटिस्पर्शज्या** (cotangent) कहते हैं और इसको संक्षेप में कोस्प थ ($\cot\theta$) करके लिखते हैं।

निष्पत्ति $\frac{\text{म क}}{\text{म ग}} = \frac{\text{कर्ण}}{\text{लम्ब}}$ को कोण थ की **व्युत्क्रमज्या** (cosecant) कहते हैं और इसको संक्षेप में व्युज्या थ ($\operatorname{cosec}\theta$) करके लिखते हैं।

निष्पत्ति $\frac{\text{म क}}{\text{म ग}}=\frac{\text{कर्ण}}{\text{आधार}}$ को कोण थ की व्युत्क्रमकोटिज्या (secant) कहते हैं और इसको संक्षेप में व्युको थ ($\sec\theta$) करके लिखते हैं।

उपर्युक्त छः निष्पत्तियों के अतिरिक्त दो और निम्नलिखित त्रिकोणमितीय निष्पत्तियाँ होती हैं :

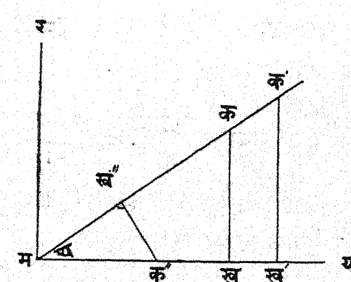
(१) शरज्या थ (versin θ)= १—कोज्या थ ($1-\cos\theta$) जिसे संक्षेप में शज्या थ लिखा जाता है।

(२) कोटिशरज्या थ (coversin θ)=१—ज्या थ ($1-\sin\theta$) जिसे संक्षेप में कोशज्या थ लिखा जाता है। इन निष्पत्तियों का प्रयोग अधिक नहीं होता है।

(१५) त्रिकोणमितीय निष्पत्तियों की स्थिरता—

जब तक कोण में कोई परिवर्त्तन नहीं होता, तब तक उसकी त्रिकोणमितीय निष्पत्तियों के मान में भी कोई परिवर्त्तन नहीं होता है—

मानलो क′ म य एक कोण है जिसकी भुजा म क′ पर क, क′ तथा भुजा म य पर क″ कोई विन्दु हैं। क, क′ क″ से क्रमशः क ख, क′ ख′ क″ख″ कोण थ की दूसरी भुजा पर लम्ब डालो।



तीनों समकोण त्रिभुज क म ख, क′ म ख′, क″ म ख″ समान कोणीय (equiangular) हैं अतः उनकी संगती (corresponding) भुजायें समानुपाती हैं

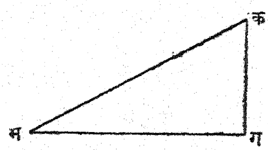
$$\therefore \quad \frac{\text{क ख}}{\text{क म}} = \frac{\text{क}'\ \text{ख}'}{\text{क}'\ \text{म}} = \frac{\text{क}''\ \text{ख}''}{\text{क}''\ \text{म}} = \text{ज्या थ}$$

$$= \sin\theta$$

अतएव निष्पत्ति ज्या थ का मान स्थिर है।

इसी प्रकार हम सिद्ध कर सकते हैं कि कोण थ की अन्य त्रिकोणमितीय निष्पत्तियाँ भी थ के मान पर निर्भर हैं न कि क, ख', क" विन्दुओं की स्थिति पर।

(१६) किसी कोण की त्रिकोणमितीय निष्पत्तियों के मूल सम्वन्ध—



मानलो कि सम कोण त्रिभुज क म ग में कोण क म ग, थ के बराबर है

अतः

$$\frac{\text{ज्या थ}}{\text{कोज्या थ}} = \frac{\frac{\text{क ग}}{\text{म क}}}{\frac{\text{म ग}}{\text{म क}}}$$

$$= \frac{\text{क ग}}{\text{म ग}} = \text{स्प थ} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (१)$$

$$\frac{\text{कोज्या थ}}{\text{ज्या थ}} = \frac{\frac{\text{म ग}}{\text{म क}}}{\frac{\text{क ग}}{\text{म क}}}$$

$$= \frac{\text{म ग}}{\text{क ग}} = \text{कोस्प थ} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (२)$$

इसी त्रिभुज में

$\text{म क}^2 = \text{क ग}^2 + \text{म ग}^2$

दोनों पक्षों में $(\text{म क})^2$ का भाग देकर

$$१ = \left(\frac{क\ ग}{म\ क}\right)^{२} + \left(\frac{म\ ग}{म\ क}\right)^{२}$$

$$= \left(ज्या\ थ\right)^{२} + \left(कोज्या\ थ\right)^{२}$$

$(ज्या\ थ)^{२}$ को $ज्या^{२}\ थ$ के रूप में लिखा जाता है तथा अन्य निष्पत्तियाँ भी इसी प्रकार लिखी जाती हैं अतः

$$१ = ज्या^{२}\ थ + कोज्या^{२}\ थ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(३)$$

दोनों पक्षों में $म\ ग^{२}$ से भाग देकर

$$\left(\frac{म\ क}{म\ ग}\right)^{२} = \left(\frac{क\ ग}{म\ ग}\right)^{२} + १$$

$$(व्युको\ थ)^{२} = (स्प\ थ)^{२} + १$$

$$व्युको^{२}\ थ = स्प^{२}\ थ + १ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(४)$$

दोनों पक्षों में $क\ ग^{२}$ से भाग देकर

$$\left(\frac{म\ क}{क\ ग}\right)^{२} = १ + \left(\frac{म\ ग}{क\ ग}\right)^{२}$$

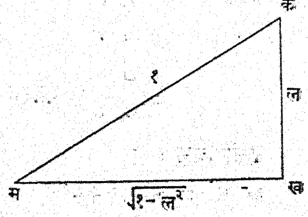
$$(व्युज्या\ थ)^{२} = १ + (कोस्प\ थ)^{२}$$

$$व्युज्या^{२}\ थ = १ + कोस्प^{२}\ थ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(५)$$

त्रिकोणमिति में उपर्युक्त सूत्र बड़े महत्वपूर्ण हैं और किसी भी परिमाण के कोण के लिये सार्थक होते हैं।

(१७) त्रिकोणमितीय निष्पत्तियों का पारस्परिक परिवर्त्तन—

(अ) क म ख एक समकोण त्रिभुज लो जिसकी भुजा क ख 'ल' के बराबर और कर्ण क म इकाई के तुल्य हो।



$$\therefore \text{म ख} = \sqrt{\text{म क}^2 - \text{क ख}^2}$$
$$= \sqrt{\text{१} - \text{ल}^2}$$

अतः

$$\text{ज्या म} = \frac{\text{क ख}}{\text{म क}} = \frac{\text{ल}}{\text{१}} = \text{ल}$$

$$\text{कोज्या म} = \frac{\text{म ख}}{\text{म क}} = \frac{\sqrt{\text{१} - \text{ल}^2}}{\text{१}} = \sqrt{\text{१} - \text{ज्या}^2\ \text{म}}$$

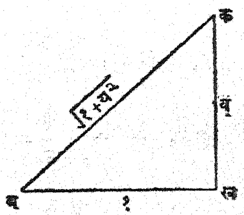
$$\text{स्प म} = \frac{\text{क ख}}{\text{म ख}} = \frac{\text{ल}}{\sqrt{\text{१} - \text{ल}^2}} = \frac{\text{ज्या म}}{\sqrt{\text{१} - \text{ज्या}^2\ \text{म}}}$$

$$\text{व्युज्या म} = \frac{\text{म क}}{\text{क ख}} = \frac{\text{१}}{\text{ल}} = \frac{\text{१}}{\text{ज्या म}}$$

$$\text{व्युको म} = \frac{\text{म क}}{\text{म ख}} = \frac{\text{१}}{\sqrt{\text{१} - \text{ल}^2}} = \frac{\text{१}}{\sqrt{\text{१} - \text{ज्या}^2\ \text{म}}}$$

$$\text{कोस्प म} = \frac{\text{म ख}}{\text{क ख}} = \frac{\sqrt{\text{१} - \text{ल}^2}}{\text{ल}} = \frac{\sqrt{\text{१} - \text{ज्या}^2\ \text{म}}}{\text{ज्या म}}$$

(आ) क म ख एक समकोण त्रिभुज लो जिसकी भुजा क ख 'य' के बराबर और आधार म ख इकाई के तुल्य हो



$$\therefore \text{कर्ण क म} = \sqrt{\text{क ख}^2 + \text{म ख}^2} = \sqrt{\text{१} + \text{य}^2}$$

अतः
$$\text{स्प म} = \frac{\text{क ख}}{\text{म ख}} = \frac{\text{य}}{\text{१}} = \text{य}$$

$$\text{ज्या म} = \frac{\text{क ख}}{\text{क म}} = \frac{\text{य}}{\sqrt{\text{१} + \text{य}^2}} = \frac{\text{स्प म}}{\sqrt{\text{१} + \text{स्प}^2\ \text{म}}}$$

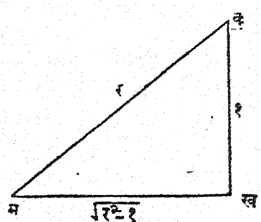
$$\text{कोज्या म} = \frac{\text{म ख}}{\text{म क}} = \frac{१}{\sqrt{१+\text{य}^{२}}} = \frac{१}{\sqrt{१+\text{स्प}^{२}\ \text{म}}}$$

$$\text{व्युज्या म} = \frac{\text{क म}}{\text{क ख}} = \frac{\sqrt{१+\text{य}^{२}}}{\text{य}} = \frac{\sqrt{१+\text{स्प}^{२}\ \text{म}}}{\text{स्प म}}$$

$$\text{व्युको म} = \frac{\text{म क}}{\text{म ख}} = \frac{\sqrt{१+\text{य}^{२}}}{१} = \frac{\sqrt{१+\text{स्प}^{२}\ \text{म}}}{१}$$

$$\text{कोस्प म} = \frac{\text{म ख}}{\text{क ख}} = \frac{१}{\text{य}} = \frac{१}{\text{स्प म}}$$

(इ) क म ख एक समकोण त्रिभुज लो जिसका कर्ण क म 'र' के बराबर और भुजा क ख इकाई के तुल्य हो।



$$\therefore \text{म ख} = \text{क}\sqrt{\text{म}^{२} - \text{क ख}^{२}}$$

$$= \sqrt{\text{र}^{२} - १}$$

$$\text{अतः व्युज्या म} = \frac{\text{म क}}{\text{क ख}} = \frac{\text{र}}{१} = \text{र}$$

$$\therefore \text{ज्या म} = \frac{\text{क ख}}{\text{म क}} = \frac{१}{\text{र}} = \frac{१}{\text{व्युज्या म}}$$

$$\text{कोज्या म} = \frac{\text{म ख}}{\text{म क}} = \frac{\sqrt{\text{र}^{२} - १}}{\text{र}} = \frac{\sqrt{\text{व्युज्या}^{२}\ \text{म} - १}}{\text{व्युज्या म}}$$

$$\text{स्प म} = \frac{\text{क ख}}{\text{म ख}} = \frac{१}{\sqrt{\text{र}^{२} - १}} = \frac{१}{\sqrt{\text{व्युज्या}^{२}\ \text{म} - १}}$$

$$\text{व्युको म} = \frac{\text{म क}}{\text{म ख}} = \frac{\text{र}}{\sqrt{\text{र}^{२} - १}} = \frac{\text{व्युज्या म}}{\sqrt{\text{व्युज्या}^{२}\ \text{म} - १}}$$

$$\text{कोस्प म} = \frac{\text{म ख}}{\text{क ख}} = \frac{\sqrt{\text{र}^{२} - १}}{१} = \sqrt{\text{व्युज्या}^{२}\ \text{म} - १}$$

टिप्पणी—ऊपर दर्शाये हुये सम्बन्धों से यह प्रकट होता है कि किस प्रकार सभी त्रिकोणमितीय निष्पत्तियों को ज्या, स्प और व्युको में परिवर्त्तित कर सकते हैं। हम देखते हैं कि जिस निष्पत्ति में अन्य निष्पत्तियों को प्रकट करना है उसके हर को इकाई मान लिया गया है और अंश को कोई संख्यात्मक मान (ल, य, र)। इसी ढंग से हम इन त्रिकोणमितीय निष्पत्तियों को शेष अन्य तीन निष्पत्तियों (कोज्या, कोस्प, व्युज्या) में भी प्रकट कर सकते हैं।

उदाहरण १ –यदि कोज्या थ $= \frac{४०}{४१}$ हो तो अन्य निष्पत्तियों का मान बताओ।

एक ऐसा त्रिभुज बनाओ जिसका आधार ४० और कर्ण ४१ हो

$$\text{अतः लम्ब} = \sqrt{४१^२ - ४०^२} = ९$$

$$\text{ज्या थ} = \frac{९}{४१} \quad \text{स्प थ} = \frac{९}{४०}$$

$$\text{व्युज्या थ} = \frac{४१}{९} \quad \text{कोस्प थ} = \frac{४०}{९}$$

$$\text{व्युको} = \frac{४१}{४०}$$

(१८) किसी कोण की त्रिकोणमितीय निष्पत्तियों को किसी दी हुई त्रिकोणमितीय निष्पत्ति में प्रकट करने की सारिणी :—

	ज्या म	कोज्या म	स्प म	व्युज्या म	व्युको म	कोस्प म
ज्या म	ज्या म	$\sqrt{१ - \text{कोज्या}^२\text{म}}$	$\frac{\text{र म}}{\sqrt{१ + \text{स्प}^२\text{म}}}$	$\frac{१}{\text{व्युज्या म}}$	$\frac{\sqrt{\text{व्युको}^२\text{म} - १}}{\text{व्युको म}}$	$\frac{१}{\sqrt{१ + \text{कोस्प}^२\text{म}}}$
कोज्या म	$\sqrt{१ - \text{ज्या}^२\text{म}}$	कोज्या म	$\frac{१}{\sqrt{१ + \text{स्प}^२\text{म}}}$	$\frac{\sqrt{\text{व्युज्या}^२\text{म} - १}}{\text{व्युज्या म}}$	$\frac{१}{\text{व्युको म}}$	$\frac{\text{कोस्प म}}{\sqrt{१ + \text{कोस्प}^२\text{म}}}$
स्प म	$\frac{\text{ज्या म}}{\sqrt{१ - \text{ज्या}^२\text{म}}}$	$\frac{\sqrt{१ - \text{कोज्या}^२\text{म}}}{\text{कोज्या म}}$	स्प म	$\frac{१}{\sqrt{\text{व्युज्या}^२\text{म} - १}}$	$\sqrt{\text{व्युको}^२\text{म} - १}$	$\frac{१}{\text{कोस्प म}}$
व्युज्या म	$\frac{१}{\text{ज्या म}}$	$\frac{१}{\sqrt{१ - \text{कोज्या}^२\text{म}}}$	$\frac{\sqrt{१ + \text{स्प}^२\text{म}}}{\text{स्प म}}$	व्युज्या म	$\frac{\text{व्युको म}}{\sqrt{\text{व्युको}^२\text{म} - १}}$	$\sqrt{१ + \text{कोस्प}^२\text{म}}$
व्युको म	$\frac{१}{\sqrt{१ - \text{ज्या}^२\text{म}}}$	$\frac{१}{\text{कोज्या म}}$	$\sqrt{१ + \text{स्प}^२\text{म}}$	$\frac{\text{व्युज्या म}}{\sqrt{\text{व्युज्या}^२\text{म} - १}}$	व्युको म	$\frac{\sqrt{१ + \text{कोस्प}^२\text{म}}}{\text{कोस्प म}}$
कोस्प म	$\frac{\sqrt{१ - \text{ज्या}^२\text{म}}}{\text{ज्या म}}$	$\frac{\text{कोज्या म}}{\sqrt{१ - \text{कोज्या}^२\text{म}}}$	$\frac{१}{\text{स्प म}}$	$\sqrt{\text{व्युज्या}^२\text{म} - १}$	$\frac{१}{\sqrt{\text{व्युको}^२\text{म} - १}}$	कोस्प म

(१६) त्रिकोणमितीय निष्पत्तियों के मान की चरम सीमायें (Limits):—

सूक्त १६ के सूत्र ३ से प्रगट है कि

ज्या^{२} थ + कोज्या^{२} थ = १

ज्या^{२} थ और कोज्या^{२} थ में वर्गघात (square power) होने के कारण इनका मान सदैव धनात्मक (positive) रहेगा; इसके अतिरिक्त चूँकि इन दोनों का योग १ है अतः इनमें से प्रत्येक का मान १ से अधिक कभी नहीं हो सकता जिससे प्रगट है कि ज्या थ और कोज्या थ का मान भी एक के वर्गमूल + १ और − १ के मध्यान्तर होगा, थ कोण चाहे जितना बड़ा क्यों न हो

अतः किसी कोण का ज्या अथवा कोज्या का सख्यात्मक मान (numerical value) इकाई से अधिक नहीं हो सकता।

चूँकि व्युज्या थ एवं व्युको थ क्रमशः ज्या थ और कोज्या थ के व्युत्क्रम (reciprocal) हैं अतः उनके संख्यात्मक मान कभी भी १ से कम नहीं हो सकते; परन्तु स्प थ एवं कोस्प थ के मान एक से बड़े भी हो सकते हैं और छोटे भी।

अभ्यास ३

शेष त्रिकोणमितीय निष्पत्तियाँ बताओ यदि

(१) कोज्या थ = $\frac{११}{६१}$

(२) व्युको थ = $\frac{३}{२}$

(३) ज्या थ = $\frac{१}{३}$

(४) ज्या थ = $\frac{३५}{३७}$

(५) कोस्प थ = $\frac{२}{७}$

(६) कोस्प थ = क

(७) स्प थ = $\frac{प}{फ}$

(८) यदि व्युज्या थ $= २\sqrt{२}$ हो तो सिद्ध करो कि $\frac{\text{कोज्या}^२ \text{ थ} - \text{ज्या}^२\text{थ}}{\text{कोज्या}^२ \text{ थ} + \text{ज्या}^२\text{थ}}$ का मान $\frac{३}{४}$ होगा।

(९) यदि ज्या थ $= \frac{प}{\sqrt{(प^२ + फ^२)}}$, सिद्ध करो कि

$$फ \text{ ज्या थ} = फ \pm प \text{ कोज्या थ}$$

(१०) यदि कोज्या थ $=$ क हो तो सिद्ध करो कि $\frac{\text{व्युज्या थ} - \text{कोस्प थ}}{\text{व्युज्या थ} + \text{कोस्प थ}} = \frac{१ - क}{१ + क}$ होगा।

(११) यदि कोज्या ६३° $=$ ·४५४ हो तो ज्या २७° का मान बताओ।

(१२) यदि किसी कोण की ज्या $= \frac{म^२ - न^२}{म^२ + न^२}$ हो तो इसका स्प बताओ। (कलकत्ता १९३२)

(१३) यदि स्प थ $= \frac{क}{ख}$ तो सिद्ध करो कि

$$\frac{क \text{ ज्या थ} - ख \text{ कोज्या थ}}{क \text{ ज्या थ} + ख \text{ कोज्या थ}} = \frac{क^२ - ख^२}{क^२ + ख^२} \text{ होगा।}$$

(१४) यदि स्प थ $= \frac{२ य (य + १)}{२ य + १}$ हो तो शेष त्रिकोणमितीय निष्पत्तियाँ बताओ।

(२०) **उदाहरण १**—सिद्ध करो कि

$$\sqrt{\left(\frac{१ + \text{ज्या थ}}{१ - \text{ज्या थ}}\right)} = \text{व्युको थ} + \text{स्प थ} \quad \text{(राजपूताना १९३८)}$$

$$\sqrt{\left(\frac{१ + \text{ज्या थ}}{१ - \text{ज्या थ}}\right)} = \sqrt{\frac{(१ + \text{ज्या थ})^२}{१ - \text{ज्या}^२ \text{ थ}}}$$

$$= \frac{१ + \text{ज्या } थ}{\sqrt{१ - \text{ज्या}^२ थ}}$$

$$= \frac{१ + \text{ज्या } थ}{\text{कोज्या } थ}$$

$$= \frac{१}{\text{कोज्या } थ} + \frac{\text{ज्या } थ}{\text{कोज्या } थ}$$

$$= \text{व्युको } थ + \text{स्प } थ$$

उदाहरण २—यदि $\text{स्प } म + \text{ज्या } म = प$

$$\text{स्प } म - \text{ज्या } म = फ$$

सिद्ध करो कि $प^२ - फ^२ = ४\sqrt{प\ फ}$

(कलकत्ता १९१४, पंजाब १९२७, राजपूताना १९४७, उ० प्र० १९४७, १९५०)

$$प^२ - फ^२ = (\text{स्प } म + \text{ज्या } म)^२ - (\text{स्प } म - \text{ज्या } म)^२$$

$$= ४ \text{ स्प } म \text{ ज्या } म$$

अब $४\sqrt{प\ फ} = ४\sqrt{\text{स्प}^२ म - \text{ज्या}^२ म}$

$$= ४ \text{ ज्या } म \sqrt{\frac{१}{\text{कोज्या}^२ म} - १}$$

$$= \frac{४ \text{ ज्या } म}{\text{कोज्या } म}\sqrt{१ - \text{कोज्या}^२ म}$$

$$= ४ \text{ ज्या } म \text{ स्प } म$$

उदाहरण ३—सिद्ध करो कि

$$\frac{१}{\text{व्युज्या } म - \text{कोस्प } म} - \frac{१}{\text{ज्या } म} = \frac{१}{\text{ज्या } म} - \frac{१}{\text{व्युज्या } म + \text{कोस्प } म}$$

$$\frac{१}{\text{व्युज्या } म - \text{कोस्प } म} + \frac{१}{\text{व्युज्या } म + \text{कोस्प } म}$$

$$= \frac{\text{व्युज्या म} + \text{कोस्प म} + \text{व्युज्या म} - \text{कोस्प म}}{(\text{व्युज्या म} - \text{कोस्प म})\ (\text{व्युज्या म} + \text{कोस्प म})}$$

$$= \frac{\text{२ व्युज्या म}}{(\text{व्युज्या}^{२}\ \text{म} - \text{कोस्प}^{२}\ \text{म})}$$

$$= \text{२ व्युज्या म}$$

$$= \frac{\text{२}}{\text{ज्या म}}$$

$$= \frac{\text{१}}{\text{ज्या म}} + \frac{\text{१}}{\text{ज्या म}}$$

अतः पक्षान्तरानयन (transposition) से

$$\frac{\text{१}}{\text{व्युज्या म} - \text{कोस्प म}} - \frac{\text{१}}{\text{ज्या म}} = \frac{\text{१}}{\text{ज्या म}} - \frac{\text{१}}{\text{व्युज्या म} + \text{कोस्प म}}$$

उदाहरण ४—सिद्ध करो कि

$$\frac{\text{स्प म} + \text{व्युको म} - \text{१}}{\text{स्प म} - \text{व्युको म} + \text{१}} = \frac{\text{१} + \text{ज्या म}}{\text{कोज्या म}}$$

$$= \frac{\text{स्प म} + \text{व्युको म} - \text{१}}{\text{स्प म} - \text{व्युको म} + \text{१}}$$

$$= \frac{(\text{स्प म} + \text{व्युको म} - \text{१})\ (\text{स्प म} + \text{व्युको म} + \text{१})}{(\text{स्प म} - \text{व्युको म} + \text{१})\ (\text{स्प म} + \text{व्युको म} + \text{१})}$$

$$= \frac{(\text{स्प म} + \text{व्युको म})^{२} - \text{१}}{(\text{स्प म} + \text{१})^{२} - \text{व्युको}^{२}\ \text{म}}$$

$$= \frac{\text{स्प}^{२}\ \text{म} + \text{व्युको}^{२}\ \text{म} + \text{२ स्प म व्युको म} - \text{१}}{\text{स्प}^{२}\ \text{म} + \text{१} + \text{२ स्प म} - \text{व्युको}^{२}\ \text{म}}$$

$$= \frac{\text{२ स्प}^{२}\ \text{म} + \text{१ स्प म व्युको म}}{\text{२ स्प म}}$$

$$= \text{स्प म} + \text{व्युको म}$$

$$=\frac{१ + \text{ज्या म}}{\text{कोज्या म}}$$

उदाहरण ५—यदि स्प म + व्युको म = य हो तो सिद्ध करो कि

$$\text{ज्या म} = \frac{य^२ - १}{य^२ + १}$$

$$\text{स्प म} + \text{व्युको म} = य$$

$$\text{व्युको म} = य - \text{स्प म}$$

$$\therefore \text{व्युको}^२ \text{म} = य^२ + \text{स्प}^२ \text{म} - २ \,य\, \text{स्प म}$$

$$१ + \text{स्प}^२\text{म} = य^२ + \text{स्प}^२ \text{म} - २ \,य\, \text{स्प म}$$

$$२ \,य\, \text{स्प म} = य^२ - १$$

$$\text{स्प म} = \frac{य^२ - १}{२ \,य}$$

$$\text{ज्या म} = \frac{\text{स्प म}}{\sqrt{१ + \text{स्प}^२\text{म}}} = \frac{य^२ - १}{य^२ + १}$$

उदाहरण ६—यदि $\text{ज्या थ} = \frac{\text{ज्या य} + \text{ज्या र}}{१ - \text{ज्या य ज्या र}}$, तो

कोज्या थ का मान बताओ।

$$\text{कोज्या}^२\text{थ} = १ - \text{ज्या}^२\text{थ}$$

$$= १ - \left(\frac{\text{ज्या य} + \text{ज्या र}}{१ + \text{ज्या य ज्या र}}\right)^२$$

$$= \frac{१ + \text{ज्या}^२ \text{य ज्या}^२ \text{र} + २\text{ज्या य ज्या र} - \text{ज्या}^२\text{य} - \text{ज्या}^२\text{र} - २\text{ज्या य ज्या र}}{(१ + \text{ज्या य ज्या र})^२}$$

$$= \frac{१ + \text{ज्या}^२\text{य} (१ - \text{कोज्या}^२\text{र}) - \text{ज्या}^२\text{य} - \text{ज्या}^२ \text{र}}{(१ + \text{ज्या य ज्या र})^२}$$

$$= \frac{१ + \text{ज्या}^२\text{य} - \text{ज्या}^२\text{य कोज्या}^२\text{र} - \text{ज्या}^२\text{य} - \text{ज्या}^२\text{र}}{(१ + \text{ज्या य ज्या र})^२}$$

$$= \frac{\text{१} + \text{ज्या}^{\text{२}}\,\text{य}\,(\text{१} - \text{कोज्या}^{\text{२}}\,\text{र}) - \text{ज्या}^{\text{२}}\,\text{य} - \text{ज्या}^{\text{२}}\,\text{र}}{(\text{१} + \text{ज्या य ज्या र})^{\text{२}}}$$

$$= \frac{\text{१} - (\text{१} - \text{कोज्या}^{\text{२}}\,\text{य})\ \text{कोज्या}^{\text{२}}\,\text{र} - \text{ज्या}^{\text{२}}\,\text{र}}{(\text{१} + \text{ज्या य ज्या र})^{\text{२}}}$$

$$= \frac{\text{कोज्या}^{\text{२}}\,\text{य कोज्या}^{\text{२}}\,\text{र}}{(\text{१} + \text{ज्या य ज्या र})^{\text{२}}}$$

$$\therefore\ \text{कोज्या थ} = \frac{\text{कोज्या य कोज्या र}}{\text{१} + \text{ज्या य ज्या र}}$$

अभ्यास ४

सिद्ध करो कि

(१) $(\text{ज्या थ} + \text{कोज्या थ})^{\text{२}} = \text{१} + \text{२ ज्या थ कोज्या थ}$

$= (\text{ज्या थ} - \text{कोज्या थ})^{\text{२}} + \text{४ ज्या थ कोज्या थ}$

(२) $(\text{ज्या थ} + \text{कोज्या थ})\ (\text{ज्या थ} - \text{कोज्या थ})$

$= \text{१} - \text{२ कोज्या}^{\text{२}}\,\text{थ}$

(३) $\text{कोज्या}^{\text{४}}\,\text{थ} - \text{ज्या}^{\text{४}}\,\text{थ} = \text{२ कोज्या}^{\text{२}}\,\text{थ} - \text{१}$

(४) $\text{व्युज्या थ} - \text{ज्या थ} = \text{कोस्प थ कोज्या थ}$

(५) $\text{व्युको थ} - \text{स्प थ} = (\text{व्युको थ} + \text{स्प थ})^{-\text{१}}$

(६) $\dfrac{\text{ज्या थ} + \text{कोज्या थ}}{\text{व्युज्या थ} + \text{व्युको थ}} = \text{ज्या थ कोज्या थ}$

(७) $\text{ज्या}^{\text{३}}\,\text{थ} + \text{कोज्या}^{\text{३}}\,\text{थ}$

$= (\text{ज्या थ} + \text{कोज्या थ})\ (\text{१} - \text{ज्या थ कोज्या थ})$

(८) $\dfrac{\text{१}}{\text{व्युज्या थ} + \text{कोस्प थ}} + \dfrac{\text{व्युज्या थ} + \text{कोस्प थ}}{\text{१}} = \dfrac{\text{२}}{\text{ज्या थ}}$

(९) $\text{कोज्या}^{\text{६}}\,\text{थ} + \text{ज्या}^{\text{६}}\,\text{थ} + \text{३ ज्या}^{\text{२}}\,\text{थ कोज्या}^{\text{२}}\,\text{थ} = \text{१}$

(१०) $\text{व्युज्या}^{\text{६}}\,\text{थ} - \text{कोस्प}^{\text{६}}\,\text{थ}$

$= \text{१} + \text{३ व्युज्या}^{\text{२}}\,\text{थ कोस्प}^{\text{२}}\,\text{थ}$

(११) $\text{व्युको}^2 \text{ थ} - \dfrac{१}{\text{व्युज्या}^2 \text{ थ} - १} = १$

(१२) $\sqrt{\left(\dfrac{१ - \text{कोज्या थ}}{१ + \text{कोज्या थ}}\right)} = \text{व्युज्या थ} - \text{कोस्प थ}$

(१३) $\sqrt{\left(\dfrac{१ + \text{कोज्या थ}}{१ - \text{कोज्या थ}}\right)} = \text{व्युज्या थ} + \text{कोस्प थ}$

(कलकत्ता १९३७)

(१४) $(\text{स्प थ} + \text{व्युको थ})^2 = \dfrac{१ + \text{ज्या थ}}{१ - \text{ज्या थ}}$ (कलकत्ता १९३४)

(१५) $(\text{स्प थ} + \text{कोस्प थ})^2$
$= \text{व्युको}^2 \text{ थ} + \text{व्युज्या}^2 \text{ थ}$ (दिल्ली १९४०)

(१६) $(१ + \text{कोज्या थ})(\text{व्युज्या थ} - \text{कोस्प थ}) = \text{ज्या थ}$

(१७) $\text{कोज्या थ} + \text{ज्या थ स्प थ} = \text{व्युको थ}$

(१८) $\dfrac{\text{व्युज्या थ}}{\text{कोस्प थ} + \text{स्प थ}} = \text{कोज्या थ}$

(१९) $\dfrac{\text{व्युज्या थ}}{\text{व्युज्या थ} - १} + \dfrac{\text{व्युज्या थ}}{\text{व्युज्या थ} + १} = २ \text{ व्युको}^2 \text{ थ}$

(२०) $\dfrac{\text{ज्या थ} - \text{कोज्या थ} + १}{\text{ज्या थ} + \text{कोज्या थ} - १} = \dfrac{१ + \text{ज्या थ}}{\text{कोज्या थ}}$

(२१) $\dfrac{\text{कोस्प य} + \text{स्प र}}{\text{कोस्प र} + \text{स्प य}} = \text{कोस्प य स्प र}$

(२२) $\text{कोस्प}^4 \text{ थ} + \text{कोस्प}^2 \text{ थ} = \text{व्युज्या}^4 \text{ थ} - \text{व्युज्या}^2 \text{ थ}$

(२३) $(१ + \text{कोस्प थ} - \text{व्युज्या थ})(१ + \text{स्प थ} + \text{व्युको थ}) = २$

(दिल्ली १९४०)

(२४) $$\frac{१}{\text{व्युको थ} + \text{स्प थ}} - \frac{१}{\text{व्युको थ}} = \frac{१}{\text{व्युको थ}} - \frac{१}{\text{व्युको थ} - \text{स्प थ}}$$

(२५) $$\frac{\text{स्प थ}}{\text{व्युको थ} - १} - \frac{\text{ज्या थ}}{१ + \text{कोज्या थ}} = \frac{२}{\text{स्प थ}}$$

(२६) $$(१ + \text{ज्या थ} + \text{कोज्या थ})^{२} = २\,(१ + \text{ज्या थ})\,(१ + \text{कोज्या थ})$$

(२७) $$\frac{\text{स्प}^{२}\,\text{थ} - \text{कोस्प}^{२}\,\text{थ}}{\text{ज्या}^{२}\,\text{थ} - \text{कोज्या}^{२}\,\text{थ}} = \frac{१ + \text{कोस्प}^{२}\,\text{थ}}{\text{कोज्या}^{२}\,\text{थ}}$$

(२८) $$\text{स्प थ} = \frac{\text{ज्या थ} - २\,\text{ज्या}^{३}\,\text{थ}}{२\,\text{कोज्या}^{३}\,\text{थ} - \text{कोज्या थ}}$$

(२९) $$\frac{\text{स्प}^{३}\text{थ}}{१ + \text{स्प}^{२}\text{थ}} + \frac{\text{कोस्प}^{३}\text{थ}}{१ + \text{कोस्प}^{२}\text{थ}} = \frac{१ - २\,\text{ज्या}^{२}\text{थ}\,\text{कोज्या}^{२}\text{थ}}{\text{ज्या थ कोज्या थ}}$$

(३०) $$\text{व्युको}^{२}\text{थ}\ \text{व्युज्या}^{२}\text{थ} = \text{स्प}^{२}\text{थ} + \text{कोस्प}^{२}\text{थ} + २$$

(३१) $$\frac{\text{कोस्प थ कोज्या थ}}{\text{कोस्प थ} + \text{कोज्या थ}} = \frac{\text{कोस्प थ} - \text{कोज्या थ}}{\text{कोस्प थ कोज्या थ}}$$

(३२) $$\frac{१ + २\,\text{ज्या थ कोज्या थ}}{(\text{ज्या थ} + \text{कोज्या थ})\,(\text{कोस्प थ} + \text{स्प थ})} = \text{ज्या थ कोज्या थ}\,(\text{ज्या थ} + \text{कोज्या थ})$$

(३३) $$\frac{\text{व्युको थ} + \text{स्प थ}}{\text{व्युज्या थ} + \text{कोस्प थ}} - \frac{\text{व्युको थ} - \text{स्प थ}}{\text{व्युज्या थ} - \text{कोस्प थ}} = २\,(\text{व्युको थ} - \text{व्युज्या थ})$$

(३४) $$\frac{\text{कोज्या}^{३}\text{थ} + \text{ज्या}^{३}\text{थ}}{\text{कोज्या थ} + \text{ज्या थ}} + \frac{\text{कोज्या}^{३}\text{थ} - \text{ज्या}^{३}\text{थ}}{\text{कोज्या थ} - \text{ज्या थ}} = २$$

(३५) $$(\text{व्युज्या}^{२}\,\text{थ} + \text{कोस्प}^{२}\text{थ})^{२} = १ + ४\ \text{कोस्प}^{२}\text{थ}\ \text{व्युज्या}^{२}\text{थ}$$

(३६) (स्प थ + कोस्प थ + व्युको थ) = $\dfrac{\text{व्युको}^{२}\ \text{थ}}{\text{स्प थ + कोस्प थ − व्युको थ}}$

(३७) ज्या^{६} थ − कोज्या^{६} थ = (ज्या थ + कोज्या थ)
(ज्या थ − कोज्या थ) (१ + ज्या थ कोज्या थ) (१ − ज्या थ कोज्या थ)

(३८) २ (ज्या^{६} थ + कोज्या^{६} थ) − ३ (ज्या^{४} थ + कोज्या^{४} थ) +
१ = ० (उ० प्र० १९३५)

(३९) ज्या^{८} थ − कोज्या^{८} थ
= (ज्या^{२} थ − कोज्या^{२} थ) (१ − २ ज्या^{२} थ कोज्या^{२} थ)

(४०) (ज्या थ + कोज्या थ)^{३}
= ३ (ज्या थ + कोज्या थ) − २(ज्या^{३} थ + कोज्या^{३} थ)

(४१) ज्या^{२} थ स्प थ − कोज्या^{२} थ कोस्प थ + व्युको थ व्युज्या थ
= २ स्प थ

(४२) ज्या^{२} थ + शज्या^{२} थ = २ शज्या थ

(४३) (१ + कोस्प थ + स्प थ) (स्प थ − कोस्प थ)
= $\dfrac{\text{ज्या}^{२}\ \text{थ}}{\text{कोज्या थ}} - \dfrac{\text{कोज्या}^{२}\ \text{थ}}{\text{ज्या थ}}$

(४४) ज्या थ (१ + स्प थ) + कोज्या थ (+ कोस्प थ)
= व्युको थ + व्युज्या थ

(४५) (ज्या थ + व्युज्या थ)^{२} + (कोज्या थ + व्युको थ)^{२}
= स्प^{२} थ + कोस्प^{२} थ + ७

(४६) (१ − कोस्प फ)^{२} + (१ − स्प फ)^{२}
= (व्युको फ − व्युज्या फ)^{२}

(४७) $\dfrac{\text{स्प}^{२}\ \text{थ − कोस्प}^{२}\ \text{थ}}{\text{स्प}^{२}\ \text{थ + कोस्प}^{२}\ \text{थ}} = \dfrac{\text{ज्या}^{४}\ \text{थ + कोज्या}^{४}\ \text{थ}}{\text{ज्या}^{२}\ \text{थ − कोज्या}^{२}\ \text{थ}}$

(४८) (स्प क + व्युज्या ख)^{२} − (कोस्प ख − व्युको क)^{२}
= २ स्प क कोस्प ख (व्युज्या क + व्युको ख)

(४९) ज्या^{6} थ + ज्या^{4} थ कोज्या^{2} थ − ज्या^{2} थ कोज्या^{4} थ − कोज्या^{6} थ = ज्या^{2} थ − कोज्या^{2} थ (दिल्ली १९४१)

(५०) $$\frac{\text{स्प क} - \text{कोस्प ख}}{\text{स्प ख} - \text{कोस्प क}} = \text{स्प कोस्प ख}$$

(५१) $$\text{कोस्प}^{2}\text{थ}\left(\frac{\text{व्युको थ} - १}{१ + \text{ज्या थ}}\right) + \text{व्युको}^{2}\text{ थ}\left(\frac{\text{ज्या थ} - १}{१ + \text{व्युको थ}}\right) = ०$$

(५२) २ शज्या थ + कोज्या^{2} थ = १ + शज्या^{2} थ

(५३) (ज्या^{6} थ − कोज्या^{6} थ) = (ज्या थ − कोज्या थ) (१ + ज्या थ कोज्या थ) (१ − ३ ज्या^{2} थ कोज्या^{2}थ + ज्या^{3} थ कोज्या^{3}थ)

(५४) यदि व्युज्या थ − ज्या थ = क

व्युको थ − कोज्या थ = ख हो तो सिद्ध करो कि

क^{2} ख^{2}(क^{2}+ख^{2}+३) = १ (राजपूताना १९४१)

(५५) यदि ७ ज्या^{2} थ + ३ कोज्या^{2} थ = ४ हो

तो सिद्ध करो कि स्प थ = $\pm \frac{१}{\sqrt{३}}$ (कलकत्ता १९३८)

(५६) यदि कोज्या थ + ज्या थ = $\sqrt{२}$ कोज्या थ, सिद्ध करो

कोज्या थ − ज्या थ = $\sqrt{२}$ ज्या थ

(५७) यदि क कोज्या^{2} थ + ख ज्या^{2} थ = ग

सिद्ध करो कि

$$\text{स्प थ} = \pm\sqrt{\frac{\text{ग} - \text{क}}{\text{ख} - \text{ग}}}$$

(५८) यदि स्प^{2} थ = १ − ई^{2}, सिद्ध करो कि

स्प^{3} थ व्युज्या थ + व्युको थ = (२ − ई^{2})$^{\frac{३}{२}}$

(५६) यदि प = क कोज्या थ + ख ज्या थ

फ = क ज्या थ − ख कोज्या थ

सिद्ध करो कि

$$क^{२} + ख^{२} = प^{२} + फ^{२}$$

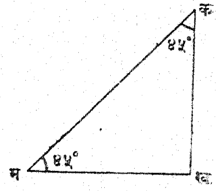
—o::o—

अध्याय ३

कुछ विशेष कोणों की त्रिकोणमितीय निष्पत्तियाँ

Values of Trigonometrical Ratios of Some Standard Angles

(२१) कोण ४५° की त्रिकोणमितीय निष्पत्तियाँ—



मानलो कि समकोण त्रिभुज क म ख में कोण म ४५° है

अतः $\angle$ म क ख = १८०° — (९०° + ४५°)

= ४५°

$\therefore$ क ख = म ख

= य (मान लो)

$\therefore$ म क = $\sqrt{२}$ य

अतः ज्या ४५° = $\frac{\text{क ख}}{\text{म क}} = \frac{\text{य}}{\sqrt{२}\,\text{य}} = \frac{१}{\sqrt{२}}$

कोज्या ४५° = $\frac{\text{म ख}}{\text{म क}} = \frac{\text{य}}{\sqrt{२}\,\text{य}} = \frac{१}{\sqrt{२}}$

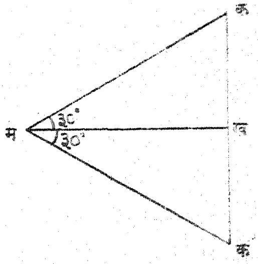
स्प ४५° = $\frac{\text{क ख}}{\text{म ख}} = \frac{\text{य}}{\text{य}} = १$

व्युज्या ४५° = $\frac{\text{म क}}{\text{क ख}} = \frac{\sqrt{२}\,\text{य}}{\text{य}} = \sqrt{२}$

व्युको ४५° = $\frac{\text{म क}}{\text{म ख}} = \frac{\sqrt{२}\,\text{य}}{\text{य}} = \sqrt{२}$

कोस्प ४५° = $\frac{\text{म ख}}{\text{क ख}} = \frac{\text{य}}{\text{य}} = १$

(२१) कोण ३०° की त्रिकोणमितीय निष्पत्तियाँ—



मान लो समकोण त्रिभुज क म ख में ∠क म ख = ३०° है। क ख को आगे बढ़ाओ और क ख = ख क' काटो। म क' को मिलाओ। दो समकोण त्रिभुज म क ख और म क' ख में

$$\begin{cases} \text{क ख} = \text{ख क}' \\ \text{म ख उभयनिष्ठ है} \end{cases}$$

$\therefore \angle$म क' ख $= \angle$म क ख $= ६०^\circ$

$= $ क म क'

अतः त्रिभुज म क क' एक समत्रिबाहु त्रिभुज है

यदि क ख = ल हो तो म क = क क'

$= २$ ल

और म ख $= \sqrt{४ \text{ल}^२ - \text{ल}^२}$

$= \sqrt{३}$ ल

अतएव ज्या $३०^\circ = \dfrac{\text{क ख}}{\text{म क}} = \dfrac{\text{ल}}{२\text{ ल}} = \dfrac{१}{२}$

कोज्या $३०^\circ = \dfrac{\text{म ख}}{\text{म क}} = \dfrac{\sqrt{३}\text{ ल}}{२\text{ ल}} = \dfrac{\sqrt{३}}{२}$

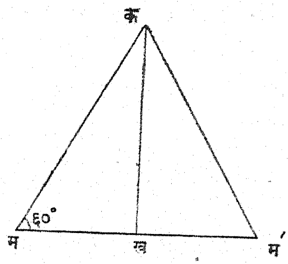
स्प $३०^\circ = \dfrac{\text{कख}}{\text{मख}} = \dfrac{\text{ल}}{\sqrt{३}\text{ ल}} = \dfrac{१}{\sqrt{३}}$

व्युज्या $३०^\circ = \dfrac{\text{मक}}{\text{कख}} = \dfrac{२\text{ ल}}{\text{ल}} = २$

व्युको $३०^\circ = \dfrac{\text{म क}}{\text{म ख}} = \dfrac{२\text{ ल}}{\sqrt{३}\text{ ल}} = \dfrac{२}{\sqrt{३}}$

$$\text{कोस्प } ३०^\circ = \frac{\text{म क}}{\text{म ख}} = \frac{\sqrt{३}\text{ल}}{\text{ल}} = \sqrt{३}$$

(२३) कोण ६०° की त्रिकोणमितीय निष्पत्तियाँ—



मान लो कि समकोण त्रिभुज क म ख में कोण क म ख, ६०° है

अतः कोण म क ख = ३०°

म ख को बढ़ाओ और म ख = ख म' काटो, क म' को मिलाओ।

चूँकि समकोण त्रिभुज क म ख और क म' ख अनुरूप है

$\therefore \angle$क म ख $= \angle$क म' ख $=$ ६०°

$= \angle$म क म'

अतः त्रिभुज म क म' एक समत्रिबाहु त्रिभुज है,

मान लो कि म ख = ल

$\therefore$ म क = म' क = २ म ख

= २ ल

$$\text{क ख} = \sqrt{४ \text{ल}^२ - \text{ल}^२} = \sqrt{३}\text{ ल}$$

$$\text{ज्या } ६०^\circ = \frac{\text{क ख}}{\text{म क}} = \frac{\sqrt{३}\text{ ल}}{२\text{ ल}} = \frac{\sqrt{३}}{२}$$

$$\text{कोज्या } ६०^\circ = \frac{\text{म ख}}{\text{म क}} = \frac{\text{ल}}{२\text{ल}} = \frac{१}{२}$$

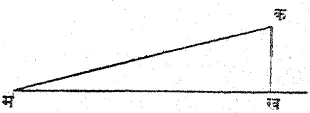
$$\text{स्प } ६०^\circ = \frac{\text{क ख}}{\text{म ख}} = \frac{\sqrt{३}\text{ ल}}{\text{ल}} = \sqrt{३}$$

$$\text{व्युज्या } ६०^\circ = \frac{\text{म क}}{\text{क ख}} = \frac{२\text{ ल}}{\sqrt{३}\text{ ल}} = \frac{२}{\sqrt{३}}$$

$$\text{व्युको } ६०^\circ = \frac{\text{म क}}{\text{म ख}} = \frac{२\text{ ल}}{\text{ल}} = २$$

$$\text{कोस्प } ६०^\circ = \frac{\text{म ख}}{\text{क ख}} = \frac{\text{ल}}{\sqrt{३}\text{ ल}} = \frac{१}{\sqrt{३}}$$

(२४) कोण ०° की त्रिकोणमितीय निष्पत्तियाँ :—



मान लो कि भ्रामक रेखा म क ने म ख के साथ एक बहुत छोटा कोण क म ख बनाया है। भ्रामक रेखा के किसी क विन्दु से आदि रेखा पर क ख एक लम्ब गिराओ।

कोण क म ख के बहुत छोटा होने के कारण सम्मुख भुजा क ख भी बहुत छोटी होगी। अब यदि ∠ क म ख को छोटे से छोटा करते जायँ तो अन्त में वह एक ऐसी राशि (Quantity) हो जायगी जो कि किसी भी छोटी से छोटी राशि से कम होगी, किन्तु ऐसी राशि शून्य ही होती है। अतः उस दशा में क विन्दु ख पर पड़ेगा, म क भुजा म ख पर सन्निपतित होगी और भुजा क ख लुप्त हो जायगी।

∴ सीमान्त मान में म क = म ख

एवं क ख = ०

$$\text{अतएव ज्या } ०^\circ = \frac{\text{क ख}}{\text{म क}} = \frac{०}{\text{म क}} = ०$$

$$\text{कोज्या } ०^\circ = \frac{\text{म ख}}{\text{म क}} = \frac{\text{म क}}{\text{म क}} = १$$

$$\text{स्प } ०^\circ = \frac{\text{क ख}}{\text{म ख}} = \frac{०}{\text{क ख}} = ०$$

$$\text{व्यु ज्या } ०^\circ = \frac{\text{म क}}{\text{क ख}} = \frac{\text{म क}}{०}$$

$$= \frac{\text{एक परिमित राशि}}{\text{एक अपरिमित छोटी राशि}}$$

= एक बहुत बड़ी अनन्त राशि = ∞

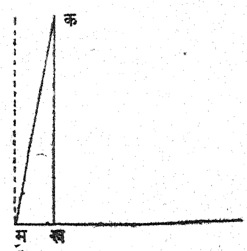
$$\text{व्युको } 0^\circ = \frac{\text{म क}}{\text{म ख}} = \frac{\text{म क}}{\text{म क}} = १$$

$$\text{कोछेप } 0^\circ = \frac{\text{म ख}}{\text{क ख}} = \frac{\text{म ख}}{0} = \infty$$

∞ यह चिह्न अनन्त राशि का सूचक है।

(२५) कोण ९०° की त्रिकोणमितीय निष्पत्तियाँ—

मान लो कि भ्रामक रेखा म क से उत्पन्न कोण क म ख एक ऐसा न्यून कोण है जो कि बहुत कुछ ९०° के निकट है, किन्तु समकोण के ठीक बराबर नहीं है। भ्रामक रेखा म क के किसी बिन्दु क से आदि रेखा म ख पर लम्बा डाल ।



कोण म क ख के बहुत छोटे होने के कारण भुजा म ख भी बहुत छोटा है; न्यून कोण क म ख जितना ९०° की ओर बढ़ता जाता है, भुजा म ख उतनी ही अधिक छोटी होती जाती है। चरम सीमा की अवस्था में जिस समय कोण क म ख ९०° होता है, बिन्दु ख, बिन्दु म पर पड़ेगा, क ख भुजा म क पर सन्निपतित होगी और भुजा म ख लुप्त हो जायगी

∴ सीमान्त मान में म क = क ख

एवं म ख = ०

$$\text{अतएव ज्या } 90^\circ = \frac{\text{क ख}}{\text{म क}} = १$$

$$\text{कोज्या } 90^\circ = \frac{\text{म ख}}{\text{म क}} = \frac{0}{\text{म क}} = 0$$

$$\text{स्प } ९०^\circ = \frac{\text{क ख}}{\text{म ख}} = \frac{\text{क ख}}{०} = \frac{\text{एक परिमित संख्या}}{\text{एक अपरिमित संख्या}}$$

$$= \text{एक बहुत बड़ी अपरिमित संख्या}$$

$$= \infty$$

$$\text{व्युज्या } ९०^\circ = \frac{\text{म क}}{\text{क ख}} = १$$

$$\text{व्युको } ९०^\circ = \frac{\text{म क}}{\text{म ख}} = \frac{\text{म क}}{०} = \infty$$

$$\text{कोस्प } ९०^\circ = \frac{\text{म ख}}{\text{क ख}} = \frac{०}{\text{क ख}} = ०$$

(२६) किसी कोण तथा उसके कोटिकोण (Complementary angles) की त्रिकोणमितीय निष्पत्तियों में पारस्परिक सम्बन्ध :—

मान लो क म ख समकोण त्रिभुज में कोण ख समकोण है

$$\text{अतः ज्या म} = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}} = \frac{\text{क ख}}{\text{म क}}$$

किन्तु कोण म, कोण क का कोटि है अर्थात्

$$९०^\circ - \text{क} = \text{म}$$

$$\text{ज्या } (९०^\circ - \text{क}) = \text{ज्या म} = \frac{\text{क ख}}{\text{क म}}$$

परन्तु

$$\text{कोज्या क} = \frac{\text{क ख}}{\text{क म}}$$

$$\text{ज्या } (९०^\circ - \text{क}) = \text{कोज्या क}$$

$$\text{स्प } (९०^\circ - \text{क}) = \text{स्प म} = \frac{\text{क ख}}{\text{म ख}} = \text{कोस्प क}$$

व्युज्या $(९०^\circ - क) =$ व्युज्या $म = \frac{म क}{क ख} =$ व्युको $क$

व्युको $(९०^\circ - क) =$ कोस्प $म = \frac{म ख}{क ख} =$ स्प $क$

(२७) कोण ०°, ३०°, ४५°, ६०°, ९०° की त्रिकोणमितीय निष्पत्तियों की सारिणी

कोण	०°	३०°	४५°	६०°	९०°
ज्या	०	$\frac{१}{२}$	$\frac{१}{\sqrt{२}}$	$\frac{\sqrt{३}}{२}$	१
कोज्या	१	$\frac{\sqrt{३}}{२}$	$\frac{१}{\sqrt{२}}$	$\frac{१}{२}$	०
स्प	०	$\frac{१}{\sqrt{३}}$	१	$\sqrt{३}$	∞
कोस्प	∞	$\sqrt{३}$	१	$\frac{१}{\sqrt{३}}$	०
व्युज्या	∞	२	$\sqrt{२}$	$\frac{२}{\sqrt{३}}$	१
व्युको	१	$\frac{२}{\sqrt{३}}$	$\sqrt{२}$	२	∞

(२८) उदाहरण १—सिद्ध करो कि

$$(१ + ज्या\ ४५^\circ + ज्या\ ३०^\circ)(१ - कोज्या\ ४५^\circ + कोज्या\ ६०^\circ) = \frac{७}{४}$$

$(१ + \text{ज्या } ४५^\circ + \text{ज्या } ३०^\circ)(१ - \text{कोज्या } ४५^\circ + \text{कोज्या } ६०^\circ)$

$= (१ + \frac{१}{\sqrt{२}} + \frac{१}{२})(१ - \frac{१}{\sqrt{२}} + \frac{१}{२})$

$= (१ + \frac{१}{२})^२ - (\frac{१}{\sqrt{२}})^२$

$= \frac{९}{४} - \frac{१}{२}$

$= \frac{७}{४}$

उदाहरण २—निम्नलिखित का मान बताओ :—

$४ \text{ कोस्प}^२ ४५^\circ - \text{व्युको}^२ ६०^\circ + \text{ज्या}^२ ३०^\circ$

$४ \text{ कोस्प}^२ ४५^\circ - \text{व्युको}^२ ६०^\circ + \text{ज्या}^२ ३०^\circ$

$= ४ - ४ + \frac{१}{४}$

$= \frac{१}{४}$

अभ्यास ५

सिद्ध करो कि

(१) $\text{स्प } ३०^\circ \text{ स्प } ६०^\circ = \text{स्प } ४५^\circ$

(२) $\text{ज्या } ६०^\circ = ३ \text{ ज्या } ३०^\circ - ४ \text{ ज्या}^३ ३०^\circ$

(३) $\text{ज्या } ६०^\circ = \frac{२ \text{ स्प } ३०^\circ}{१ + \text{स्प}^२ ३०^\circ}$

(४) $\text{स्प}^२ ६०^\circ \text{ ज्या}^२ ३०^\circ + \frac{१}{३} \text{ कोस्प}^२ ४५^\circ \text{ व्युज्या}^२ ३०^\circ =$
$= ५ \text{ व्युको}^२ ३०^\circ \text{ ज्या}^२ ४५^\circ - ५ \text{ कोज्या}^४ ४५^\circ$

(५) $\text{कोस्प}^२ ३०^\circ - २ \text{ कोज्या}^२ ६०^\circ - \frac{३}{४} \text{ व्युको } ४५^\circ$
$- ४ \text{ व्युको}^२ ३०^\circ = -४\frac{१}{३}$

(६) $\frac{\text{कोस्प } \frac{\pi}{६} + \text{स्प } \frac{\pi}{३}}{\text{स्प } \frac{\pi}{६} + \text{कोस्प } \frac{\pi}{३}} = \text{कोस्प } \frac{\pi}{६} \text{ स्प } \frac{\pi}{३}$

(७) व्युको ०° + २ ज्या ३०° + २ कोज्या^{२} ४५° + $\frac{१}{३}$ स्प^{२} ६०° + व्युज्या ९०° = ५

(८) कोज्या ४५° कोज्या ६०° − ज्या ४५° ज्या ६०°

$$= -\frac{\sqrt{३}-१}{२\sqrt{२}}$$

(९) स्प ३०° (१ + ज्या ६०° + ज्या ३०°) = कोज्या ६०° + कोज्या ३०°

(१०) $\frac{१ + \text{स्प}^{२}\ ६०°}{२ - \text{स्प}^{२}\ ४५°}$ + ३ (कोज्या ०° ज्या^{२} ४५° − ज्या ६०) = $\frac{११}{२} - \frac{३\sqrt{३}}{२}$

(११) ३ स्प^{२} ४५° — ज्या^{२} ६०° − $\frac{१}{२}$ कोस्प^{२} ३०° + $\frac{१}{८}$ व्युको^{२} ४५° = १

(१२) $\left(\frac{१ + \text{कोस्प}\ ६०°}{१ - \text{कोस्प}\ ६०°}\right)^{२} = \frac{१ + \text{कोज्या}\ ३०°}{१ - \text{कोज्या}\ ३०°}$

(१३) कोस्प ३०° + कोस्प ६०° + कोस्प ९०° − कोस्प ३०° कोस्प ६०° कोस्प ९०°

= व्युज्या ३०° व्युज्या ६०° व्युज्या ९०°

(१४) $\frac{४}{३}$ कोस्प^{२} ३०° + ३ ज्या^{२} ६०° − २ व्युज्या^{२} ६०° − $\frac{३}{४}$ स्प^{२} ३०° = $\frac{१०}{३}$

(१५) स्प^{२} $\frac{\pi}{४}$ − कोज्या^{२} $\frac{\pi}{३}$ = कोज्या $\frac{\pi}{६}$ ज्या $\frac{\pi}{४}$ कोज्या $\frac{\pi}{४}$ स्प $\frac{\pi}{३}$

(१६) ज्या (९० − म) व्युज्या (९० − म) = १

(१७) कोज्या (९० − म) व्युज्या (९० − म) = स्प म

(१८) व्युज्या² म + व्युज्या² (९०° − म)

= व्युज्या² म व्युज्या² (९० − म)

(१९) यदि कोज्या थ = $\frac{४}{५}$ तो कोस्प (९० − थ) का मान बताओ।

(२०) यदि थ और फ धनात्मक न्यूनकोण (positive acute angles) हों और

स्प (थ + फ) = √३

स्प (थ − फ) = १

तो थ और फ का मान बताओ।

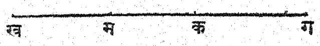
अध्याय ४

त्रिकोणमितीय निष्पत्तियों के चिह्न

Signs of the Trigonometrical Ratios

(२६) **रेखाओं की माप**—यदि कहा जाय कि किसी स्टेशन से चलकर एक रेलगाड़ी १० मील की दूरी पर रुक गई है तो हमें उसकी स्थिति का पूरा ज्ञान तब तक नहीं हो सकता जब तक कि हमें यह न बताया जाय कि रेलगाड़ी स्टेशन से किस दिशा में गई थी। इससे तो केवल यह पता लगता है कि रेलगाड़ी स्टेशन से या तो दस मील एक ओर है या दूसरी ओर।

इसी संशय (ambiguity) को दूर करने के लिये यह आवश्यक हो जाता है कि रेखा की किसी एक दिशा को धनात्मक (positive) मान लिया जाय और उसके विरुद्ध दूसरी को ऋणात्मक (negative)। गणितज्ञों ने किसी रेखा के बायीं से दाहिनी ओर जाने की दशा को धनात्मक माना है और दाहिनी ओर से बाईं ओर जाने की दिशा को ऋणात्मक।



चित्र में लम्बाई म क धनात्मक है, म ख ऋणात्मक; लम्बाई ख म धनात्मक है, क म ऋणात्मक।

यदि म स्टेशन से कोई मनुष्य ग तक गया और ग से फिर स्टेशन की ओर क तक आगया तो उसने (म ग + ग क) दूरी तै की।

किन्तु म ग + ग क = म ग + (- क ग)

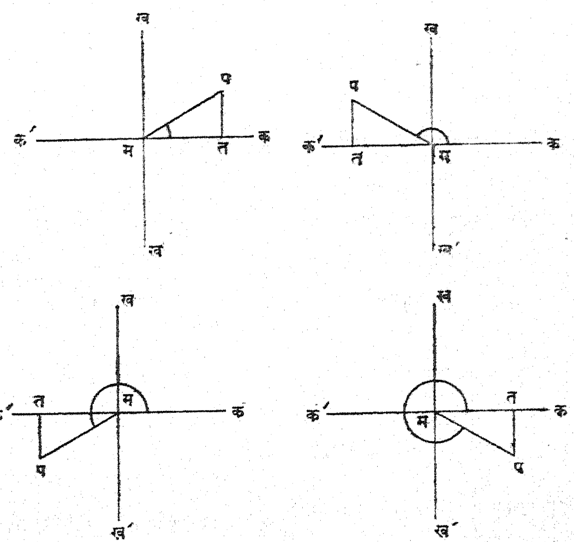
= म ग - क ग

= म क

अतः धनात्मक दिशा में उस मनुष्य की स्थिति क विन्दु पर है।

(३०) त्रिकोणमितीय निष्पत्तियों के चिह्न

मान लो कि क′म क और ख म ख′ दो रेखायें म विन्दु पर एक दूसरे को समकोण पर काटती हैं।



क′ म क के समानान्तर दूरियाँ यदि बायीं ओर से दाहिनी ओर मापी गई हों तो **धनात्मक** और यदि दाहिनी ओर से बायीं ओर तो **ऋणात्मक** मानी जाती हैं।

ख′ म ख के समानान्तर दूरियाँ यदि नीचे से ऊपर को मापी गई हो तो धनात्मक और यदि ऊपर से नीचे की ओर तो ऋणात्मक मानी जाती हैं।

प्रथम पाद (First Quadrant)—प्रथम पाद में भ्रामक रेखा से उत्पन्न कोण थ न्यूनकोण है। यहाँ पर म त और

त प दोनों ही धनात्मक हैं। भ्रामक रेखा म प तो सदैव ही धनात्मक होती है। अतः इस पाद में प्रत्येक त्रिकोणमितीय निष्पत्ति धनात्मक है।

द्वितीय पाद (Second Quadrant)—दूसरे पाद में म त ऋणात्मक है और त प धनात्मक। अतः

$$\text{ज्या थ} = \frac{\text{त प}}{\text{म प}} = +\text{राशि}$$

$$\text{कोज्या थ} = \frac{\text{म त}}{\text{म प}} = -\text{राशि}$$

$$\text{स्प थ} = \frac{\text{त प}}{\text{म त}} = -\text{राशि}$$

$$\text{व्युज्या थ} = \frac{\text{म प}}{\text{त प}} = +\text{राशि}$$

$$\text{व्युको थ} = \frac{\text{म प}}{\text{म त}} = -\text{राशि}$$

$$\text{कोस्प थ} = \frac{\text{म त}}{\text{त प}} = -\text{राशि}$$

तृतीय पाद (Third Quadrant)—तीसरे पाद में म त एवं त प दोनों ही ऋणात्मक हैं। अतः

$$\text{ज्या थ} = \frac{\text{त प}}{\text{म प}} = -\text{राशि}$$

$$\text{कोज्या थ} = \frac{\text{म त}}{\text{म प}} = -\text{राशि}$$

$$\text{स्प थ} = \frac{\text{त प}}{\text{म त}} = +\text{राशि}$$

$$\text{व्युज्या थ} = \frac{\text{म प}}{\text{त प}} = -\text{राशि}$$

$$\text{व्युको } थ = \frac{म\,प}{म\,त} = -\text{राशि}$$

$$\text{कोस्प } थ = \frac{म\,त}{त\,प} = +\text{राशि}$$

चतुर्थ पाद (Fourth Quadrant) इस पाद में म त धनात्मक है एवं त प ऋणात्मक । अतः

$$\text{ज्या } थ = \frac{त\,प}{म\,प} = -\text{राशि}$$

$$\text{कोज्या } थ = \frac{म\,त}{म\,प} = +\text{राशि}$$

$$\text{स्प } थ = \frac{त\,प}{म\,त} = -\text{राशि}$$

$$\text{व्युज्या } थ = \frac{म\,प}{त\,प} = -\text{राशि}$$

$$\text{व्युको } थ = \frac{म\,प}{म\,त} = +\text{राशि}$$

$$\text{कोस्प } थ = \frac{म\,त}{त\,प} = -\text{राशि}$$

(३१) उपर्युक्त फलों को निम्नलिखित सारिणी द्वारा प्रकट किया जा सकता है :—

	प्रथम पाद में चिह्न	द्वितीय पाद में चिह्न	तृतीय पाद में चिह्न	चतुर्थ पाद में चिह्न
ज्या एवं व्युज्या	+	+	—	—
कोज्या एवं व्युको	+	—	—	+
स्प एवं कोस्प	+	—	+	—

अभ्यास ६

निम्नलिखित कोणों की कोज्या के क्या चिह्न होंगे ?

(१) १६०° (२) १३५°

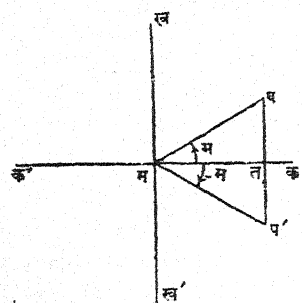
(३) ३००°

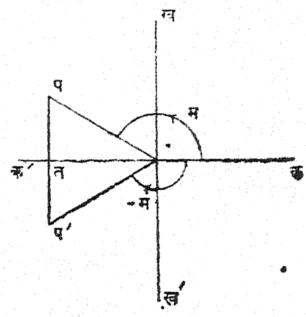
निम्नलिखित कोणों के कोस्प के क्या चिह्न होंगे ?

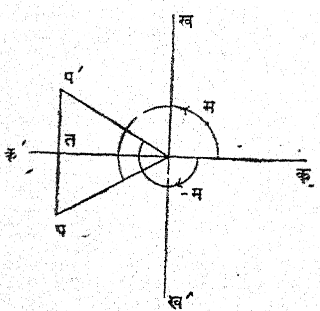
(४) ३१५° (५) −२०°

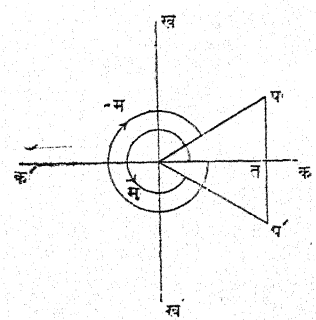
(६) १७०° (७) २३०°

(३२) म के सभी मानों के लिये कोण (−म) और कोण म की त्रिकोणमितीय निष्पत्तियों में पारस्परिक सम्बंध—









मान लो भ्रामक रेखा म प अपने आदि स्थान (initial-position) से घूमकर कोण म वामवर्त दिशा में और कोण−म दक्षिणावर्त दिशा में बनाती है। म प भ्रामक रेखा के किसी विन्दु प से म क (अथवा म क') पर लम्ब डालो और इसे इतना बढ़ाओ कि म प' के प' विन्दु पर मिले।

समकोण त्रिभुज म प त और म प' त में

$$\begin{cases} \angle \text{प म त} = \angle \text{प' म त} \\ \text{म त उभयनिष्ठ है} \end{cases}$$

$$\therefore \text{त्रिभुज म प त} \equiv \triangle \text{म प' त}$$

अतः म प' = म प

त प = त प' (संख्यात्मक मान)

किन्तु त प और त प' की दिशायें एक दूसरे के विरुद्ध हैं

अतः त प' = −त प

$$\because \text{ज्या} (- \text{म}) = \frac{\text{त प'}}{\text{म प'}} = \frac{-\text{त प}}{\text{म प}} = -\text{ज्या म}$$

$$\text{कोज्या} (- \text{म}) = \frac{\text{म त}}{\text{म प'}} = \frac{\text{म त}}{\text{म प}} = \text{कोज्या म}$$

$$\text{स्प} (- \text{म}) = \frac{\text{त प'}}{\text{म त}} = \frac{-\text{त प}}{\text{म त}} = -\text{स्प म}$$

$$\text{व्युज्या} (- \text{म}) = \frac{\text{म प'}}{\text{त प'}} = \frac{\text{म प}}{-\text{त प}} = -\text{व्युज्या म}$$

$$\text{व्युको} (- \text{म}) = \frac{\text{म प'}}{\text{म त}} = \frac{\text{म प}}{\text{म त}} = \text{व्युको म}$$

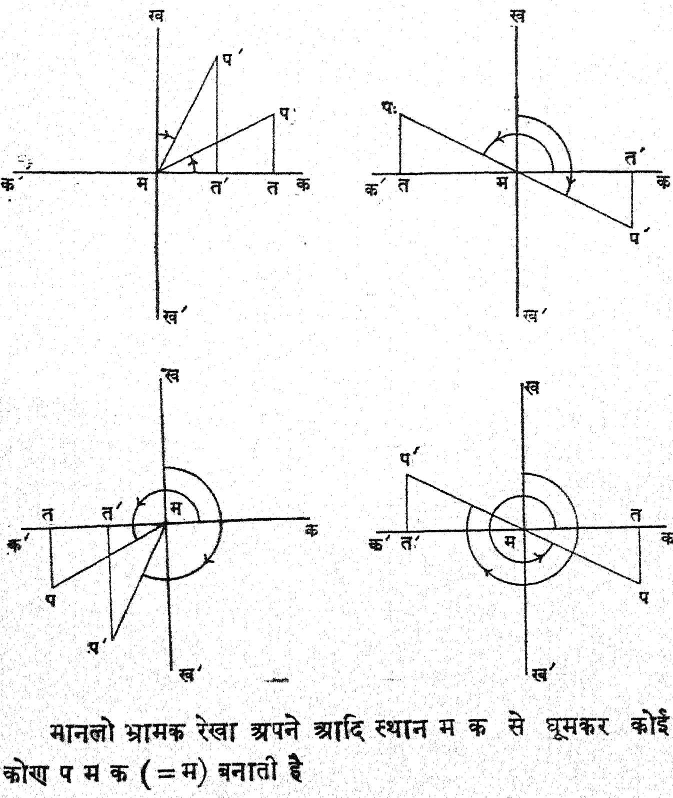
$$\text{कोस्प} (- \text{म}) = \frac{\text{म त}}{\text{त प'}} = \frac{\text{म त}}{-\text{त प}} = -\text{कोस्प म}$$

टिप्पणी—इन सारी निष्पत्तियों का मान केवल पहिली दो निष्पत्तियों से निकाला जा सकता है, उदाहरणार्थ

$$स्प\,(-६०^\circ) = \frac{ज्या\,(-६०^\circ)}{कोज्या\,(-६०^\circ)} = \frac{-ज्या\,६०^\circ}{कोज्या\,६०^\circ} = -स्प\,६०^\circ$$

$$व्युको\,(-३०^\circ) = \frac{१}{कोज्या(-३०^\circ)} = \frac{१}{कोज्या\,३०^\circ} = व्युको\,३०^\circ$$

(३३) म के सभी मानों के लिये कोण (९०° − म) और कोण म की त्रिकोणमितीय निष्पत्तियों में पारस्परिक सम्बंध—



मानलो भ्रामक रेखा अपने आदि स्थान म क से घूमकर कोई कोण प म क (= म) बनाती है

दूसरी बार मानलो भ्रामक रेखा म ख तक पहुँच जाती है किन्तु फिर दक्षिणावर्त घूम कर ∠ख म प', कोण म के बराबर बनाती है जिससे म प' उसकी नयी स्थिति है

अतः कोण क म प' = ९०° − म

म प' = म प लो तथा प और प' से म क (अथवा मक') पर क्रमशः प त और प' त' लम्ब डालो

अब चूँकि ∠क म प = ∠ख म प' (संख्यात्मक मान)
= ∠म प' त' (एकान्तर कोण)

म प = म प'

समकोण प' त' म = समकोण प त म

∴ △ म प' त' ≡ △ म प त

अतः प' त' = म त एवं म त' = प त

ये सम्बन्ध दिये हुये सभी चित्रों में सत्य हैं, इनके चिह्न का कहीं भी अन्तर नहीं पड़ता है

$$\therefore \text{ ज्या } (९०° - म) = \frac{त'प'}{म\,प'} = \frac{म\,त}{म\,प} = \text{कोज्या म}$$

$$\text{कोज्या } (९०° - म) = \frac{म\,त'}{म\,प'} = \frac{प\,त}{म\,प} = \text{ज्या म}$$

$$\text{स्प } (९०° - म) = \frac{त'प'}{म\,त'} = \frac{म\,त}{प\,त} = \text{कोस्प म}$$

$$\text{व्युज्या } (९०° - म) = \frac{म\,प'}{त'प'} = \frac{म\,प}{म\,त} = \text{व्युको म}$$

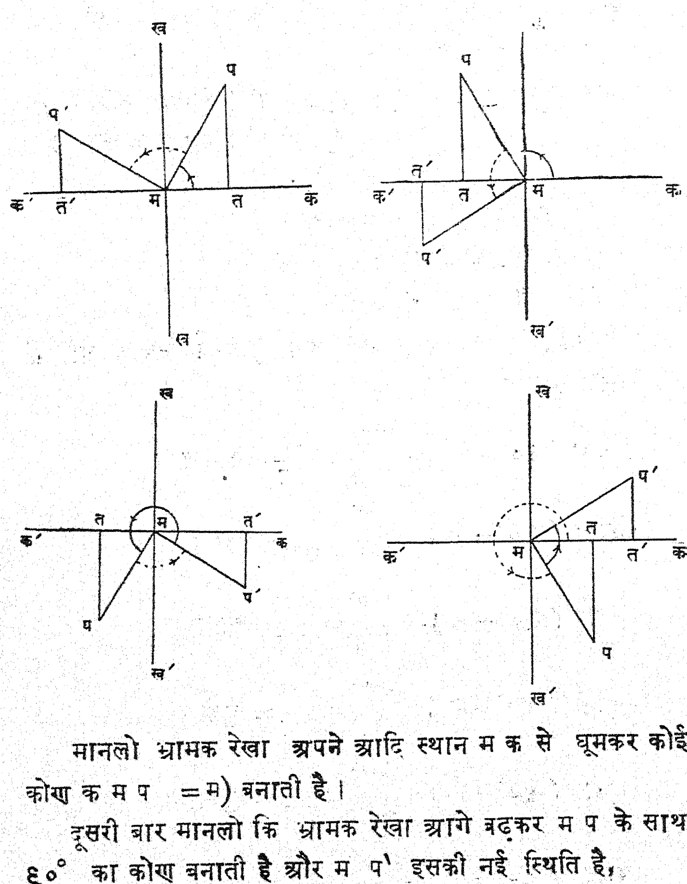
$$\text{व्युको } (९०° - म) = \frac{म\,प'}{म\,त'} = \frac{म\,प}{प\,त} = \text{व्युज्या}$$

$$\text{कोस्प } (९०° - म) = \frac{म\,त'}{त'प'} = \frac{प\,त}{म\,त} = \text{स्प म}$$

उदाहरण—ज्या ३०° = ज्या (९०° − ६०°) = कोज्या ६०°

स्प ६०° = स्प (९०° − ३०°) = कोस्प ३०°

(३४) म के सभी मानों के लिये कोण (९०° + म) और कोण म की त्रिकोणमितीय निष्पत्तियों में पारस्परिक सम्बंध—



मानलो भ्रामक रेखा अपने आदि स्थान म क से घूमकर कोई कोण क म प = म) बनाती है।

दूसरी बार मानलो कि भ्रामक रेखा आगे बढ़कर म प के साथ ९०° का कोण बनाती है और म प' इसकी नई स्थिति है,

अतः कोण क म प' = (९०° + म)

म प' = म प काटो तथा प एवं प' से म क (अथवा म क') पर क्रमशः प त एवं प' त' लम्ब डालो।

चूँकि प्रत्येक आकृति में कोण प म प' एक समकोण है

∴ ∠त म प + ∠त' म प' = १ समकोण

∠त म प = ९०° − ∠त' म प'

= ∠म प' त'

समकोण त्रिभुज त म प और त' म प' में

{ ∠ त म प = ∠म प' त'
म प = म प'

∴ △ त म प ≡ △ त' म प'

अतः म त = त' प' (संख्यात्मक मान)

त प = म त' (संख्यात्मक मान)

प्रत्येक आकृति में म त और त' प' की एक ही दिशा है किन्तु त प और म त' की दिशा एक दूसरे के विरुद्ध हैं

अतः त' प' = + म त

म त' = − त प

अतएव

$$\text{ज्या } (९०^\circ + \text{म}) = \frac{\text{त' प'}}{\text{म प'}} = \frac{\text{म त}}{\text{म प}} = \text{कोज्या म}$$

$$\text{कोज्या } (९०^\circ + \text{म}) = \frac{\text{म त'}}{\text{म प'}} = \frac{-\text{त प}}{\text{म प}} = -\text{ज्या म}$$

$$\text{स्प } (९०^\circ + \text{म}) = \frac{\text{त' प'}}{\text{म त'}} = \frac{\text{म त}}{-\text{त प}} = -\text{कोस्प म}$$

$$\text{व्युज्या } (९०^\circ + \text{म}) = \frac{\text{म प'}}{\text{त' प'}} = \frac{\text{म प}}{\text{म त}} = \text{व्युको म}$$

$$\text{व्युको } (९०^\circ + \text{म}) = \frac{\text{म प'}}{\text{म त'}} = \frac{\text{म प}}{-\text{त प}} = -\text{व्युज्या म}$$

$$\text{कोस्प}\ (९०^\circ + \text{म}) = \frac{\text{म त'}}{\text{त' प'}} = \frac{-\text{त प}}{\text{म त}} = -\text{स्प म}$$

उदाहरण (१) $\text{ज्या}\ १२०^\circ = \text{ज्या}\ (९०^\circ + ३०^\circ)$

$$= \text{कोज्या}\ ३०$$

$$= \frac{\sqrt{३}}{२}$$

(२) $\text{कोज्या}\ १३५^\circ = \text{कोज्या}\ (९०^\circ + ४५^\circ)$

$$= -\text{ज्या}\ ४५^\circ$$

$$= -\frac{१}{\sqrt{२}}$$

(३) $\text{स्प}\ १५०^\circ = \text{स्प}\ (९०^\circ + ६०^\circ)$

$$= -\text{कोस्प}\ ६०^\circ$$

$$= -\frac{१}{\sqrt{३}}$$

(४) $\text{ज्या}\ १८०^\circ = \text{ज्या}\ (९०^\circ + ९०^\circ)$

$$= \text{कोज्या}\ ९०^\circ$$

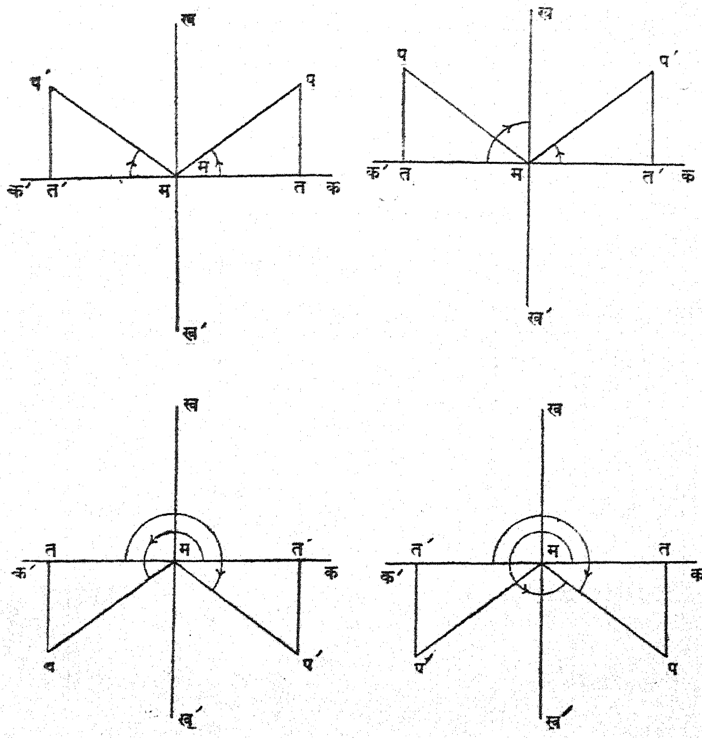
$$= ०$$

(५) $\text{कोज्या}\ १८०^\circ = \text{कोज्या}\ (९०^\circ + ९०^\circ)$

$$= -\text{ज्या}\ ९०^\circ$$

$$= -१$$

(३५) म के सभी मानों के लिये कोण (१८०° − म) और कोण म की त्रिकोणमितीय निष्पत्तियों में पारस्परिक सम्बन्ध—



मानलो भ्रामक रेखा अपने आदि स्थान म क से घूमकर कोई कोण क म प (= म) बनाती है।

दूसरी बार मानलो भ्रामक रेखा म क′ तक पहुँच जाती है किन्तु फिर दक्षिणावर्त घूमकर ∠क′ म प′ कोण म के बराबर बनाती है और म प′ उसकी नई स्थिति है,

कोण क म प′ = १८०° − म

म प' = म प लो तथा प एवं प' से म क (अथवा म क') पर क्रमशः प त एवं प' त' लम्ब डालो।

समकोण त्रिभुज म प त और म त' प' में

$$\left\{ \begin{array}{l} \angle \text{त म प} = \angle \text{त' म प'} \\ \text{म प} = \text{म प'} \end{array} \right.$$

$$\therefore \triangle \text{म प त} \equiv \triangle \text{म प' त'}$$

अतः म त = म त' (संख्यात्मक मान)

त प = त' प' (संख्यात्मक मान)

प्रत्येक आकृति में म त और म त' की दिशायें एक दूसरे से विरुद्ध हैं किन्तु त प एव त' प' की एक ही दिशायें हैं

अतः म त' = − म त

त' प' = त प

अतएव

$$\text{ज्या } (१८०^\circ - \text{म}) = \text{ज्या क म प} = \frac{\text{त' प'}}{\text{म प'}} = \frac{\text{त प}}{\text{म प}} = \text{ज्या म}$$

$$\text{कोज्या } (१८०^\circ - \text{म}) = \frac{\text{म त'}}{\text{म प'}} = \frac{-\text{म त}}{\text{म प}} = -\text{कोज्या म}$$

$$\text{स्प } (१८०^\circ - \text{म}) = \frac{\text{त' प'}}{\text{म त'}} = \frac{\text{त प}}{-\text{म त}} = -\text{स्प म}$$

$$\text{व्युज्या } (१८०^\circ - \text{म}) = \frac{\text{म प'}}{\text{त' प'}} = \frac{\text{म प}}{\text{त प}} = \text{व्युज्या म}$$

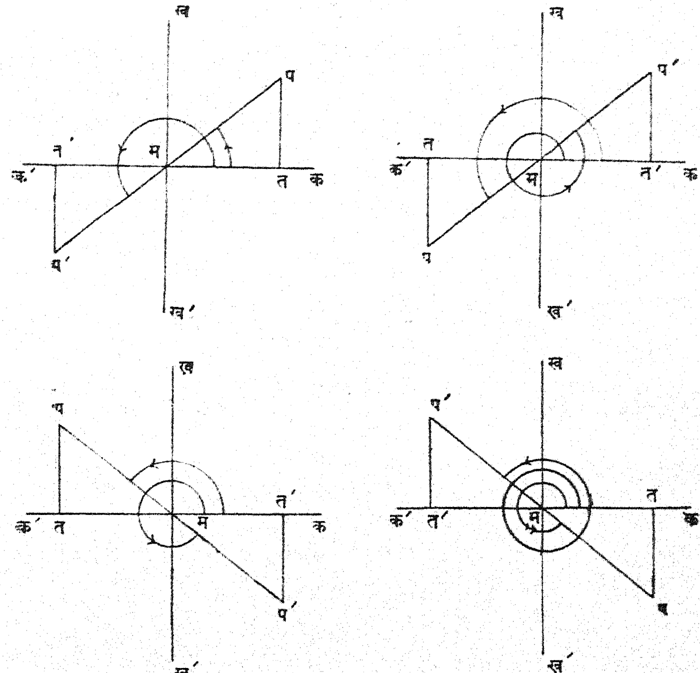
$$\text{व्युको } (१८०^\circ - \text{म}) = \frac{\text{म प'}}{\text{म त'}} = \frac{\text{म प}}{-\text{म त}} = -\text{व्युको म}$$

$$\text{कोस्प } (१८०^\circ - \text{म}) = \frac{\text{म त'}}{\text{त' प'}} = \frac{-\text{म त}}{\text{त प}} = -\text{कोस्प म}$$

उदाहरण

$$\text{ज्या } १५०^\circ = \text{ज्या } (१८०^\circ - ३०^\circ)$$
$$= \text{ज्या } ३०^\circ$$
$$= \frac{१}{२}$$

(३६) म के सभी मानों के लिये कोण (१८०° + म) तथा कोण म की त्रिकोणमितीय निष्पत्तियों में पारस्परिक सम्बन्ध :—



मान लो भ्रामक रेखा अपने आदि स्थान म क से घूमकर कोई कोण क म प (= म) बनाती है

दूसरी बार मान लो कि भ्रामक रेखा आगे बढ़कर म प के साथ १८०° का कोण बनाती है और म प' इसकी नई स्थिति है,

अतः कोण क म प' = १८०° + म

म प = म प' लो और प एवं प' विन्दु से मक (अथवा म क') पर क्रमशः प त एवं प' त' लम्ब डालो। पूर्व की भाँति यहां भी त्रिभुज म प त और त्रिभुज म प' त' अनुरूप है

∴ त प = त' प' (संख्यात्मक मान)

म त = म त' (संख्यात्मक मान)

किन्तु सभी आकृतियों में प त और प' त' की एवं म त और म त' की दिशायें एक दूसरे के विरुद्ध हैं।

अतः त' प' = −त प

म त' = −म त

अतएव

$$\text{ज्या } (१८०^\circ + \text{म}) = \frac{\text{त' प'}}{\text{म प'}} = \frac{-\text{त प}}{\text{म प}} = -\text{ज्या म}$$

$$\text{कोज्या } (१८०^\circ + \text{म}) = \frac{\text{म त'}}{\text{म प'}} = \frac{-\text{म त}}{\text{म प}} = -\text{कोज्या म}$$

$$\text{स्प } (१८०^\circ + \text{म}) = \frac{\text{त' प'}}{\text{म त'}} = \frac{-\text{त प}}{-\text{म त}} = \text{स्प म}$$

$$\text{व्युज्या } (१८०^\circ + \text{म}) = \frac{\text{म प'}}{\text{त' प'}} = \frac{\text{म प}}{-\text{त प}} = -\text{व्युज्या म}$$

$$\text{व्युको } (१८०^\circ + \text{म}) = \frac{\text{म प'}}{\text{म त'}} = \frac{\text{म प}}{-\text{म त}} = -\text{व्युको म}$$

$$\text{कोस्प } (१८०^\circ + \text{म}) = \frac{\text{म त'}}{\text{त' प'}} = \frac{-\text{म त}}{-\text{त प}} = \text{कोस्प म}$$

उदाहरण

ज्या २१०° = ज्या (१८०° + ३०°) = − ज्या ३०° = $\frac{१}{२}$

कोज्य २२५° = कोज्या (१८०° + ४५°) = −कोज्या ४५° = $-\frac{१}{\sqrt{२}}$

स्प २४०° = स्प (१८०° + ६०°) = स्प ६०° = $\sqrt{३}$

ज्या २७० = ज्या (१८०° + ९०°) = −ज्या ९०° = −१

कोज्या २७०° = कोज्या (१८०° + ९०°) = −कोज्या ९० = ०

(३७) म के सभी मानों के लिये कोण (३६०° ± म) और कोण म की त्रिकोणमितीय निष्पत्तियों में पारस्परिक सम्बन्धः-

भ्रामक रेखा को (३६०° + म) कोण बनाने पर वही स्थिति होगी जो कि कोण (+म) बनाने पर होती है। अतएव (३६०° + म) कोण की त्रि-निष्पत्तियाँ कोण (+ म) की त्रि-निष्पत्तियों के बराबर होंगी।

इसी प्रकार भ्रामक रेखा को (३६०° − म) कोण बनाने पर वही स्थिति होगी जो कोण (− म) बनाने पर होती है। अतएव (३६०° − म) की त्रि-निष्पत्तियाँ कोण (− म) की त्रि-निष्पत्तियों के बराबर होंगी।

उदाहरण १— ज्या (५४५°)

= ज्या (३६०° + १८५°)

= ज्या १८५°

= ज्या (१८०° + ५°)

= − ज्या ५°

उदाहरण २— स्प (− १३८०°)

= − स्प (३ × ३६०° + ३००°)

= − स्प ३००°

$$= -\text{स्प}(३६०° - ६०°)$$
$$= \text{स्प } ६०°$$
$$= \sqrt{३}$$

(३८) सूक्त २७ में दी हुई सारिणी का विस्तृत रूप—

कोण	०°	३०°	४५°	६०°	९०°	१२०°	१३५°	१५०°	१८०°
ज्या	०	$\frac{१}{२}$	$\frac{१}{\sqrt{२}}$	$\frac{\sqrt{३}}{२}$	१	$\frac{\sqrt{३}}{२}$	$\frac{१}{\sqrt{२}}$	$\frac{१}{२}$	०
कोज्या	१	$\frac{\sqrt{३}}{२}$	$\frac{१}{\sqrt{२}}$	$\frac{१}{२}$	०	$-\frac{१}{२}$	$\frac{-१}{\sqrt{२}}$	$-\frac{\sqrt{३}}{२}$	-१
स्प	०	$\frac{१}{\sqrt{३}}$	१	$\sqrt{३}$	∞	$-\sqrt{३}$	-१	$\frac{-१}{\sqrt{३}}$	०
व्युज्या	∞	२	$\sqrt{२}$	$\frac{२}{\sqrt{३}}$	१	$\frac{२}{\sqrt{३}}$	$\sqrt{२}$	२	∞
व्युको	१	$\frac{२}{\sqrt{३}}$	$\sqrt{२}$	२	∞	-२	$-\sqrt{२}$	$\frac{-२}{\sqrt{३}}$	-१
कोस्प	∞	$\sqrt{३}$	१	$\frac{१}{\sqrt{३}}$	०	$\frac{-१}{\sqrt{३}}$	-१	$-\sqrt{३}$	∞

(३९) उदाहरण १—सरल करो:—

ज्या (१८०° – म) कोज्या (२७०°–म) व्युज्या (१८०° + म)
व्युको (२७०° + म)

$$= -\text{ज्या म कोज्या } (१८०^\circ + ९०^\circ - \text{म}) \text{ व्युज्या म व्युको } (१८०^\circ + ९०^\circ + \text{म})$$

$$= -\text{ज्या म } \{-\text{कोज्या } (९०^\circ - \text{म})\} \text{ व्युज्या म } \{-\text{व्युको } (९०^\circ + \text{म})\}$$

$$= -\text{ज्या म } (-\text{ज्या म}) \text{ व्युज्या म } (+\text{व्युज्या म})$$

$$= १$$

उदाहरण २—यदि क, ख, ग, किसी त्रिभुज के कोण हों तो सिद्ध करो कि

$$\frac{\text{स्प}(\text{ख}+\text{ग})+\text{स्प}(\text{ग}+\text{क})+\text{स्प}(\text{क}+\text{ख})}{\text{स्प}(\pi-\text{क})+\text{स्प}(२\pi-\text{ख})+\text{स्प}(३\pi-\text{ग})} = १$$

चूँकि $\text{क}+\text{ख}+\text{ग}=\pi$

$\therefore \text{क}+\text{ख}=\pi-\text{ग}$

$\text{ख}+\text{ग}=\pi-\text{क}$

$\text{ग}+\text{क}=\pi-\text{ख}$

$$\text{अतः वाम पक्ष} = \frac{\text{स्प}(\pi-\text{क})+\text{स्प}(\pi-\text{ख})+\text{स्प}(\pi-\text{ग})}{\text{स्प}(\pi-\text{क})+\text{स्प}(२\pi-\text{ख})+\text{स्प}(\pi-\text{ग})}$$

$$= \frac{-\text{स्प क}-\text{स्प ख}-\text{स्प ग}}{-\text{स्प क}-\text{स्प ख}-\text{स्प ग}}$$

$$= १$$

उदाहरण ३—सरल करो:—

$$\frac{\text{ज्या }१३५^\circ - \text{कोज्या }१२०^\circ}{\text{ज्या }१३५^\circ + \text{कोज्या }१२०^\circ}$$

$$= \frac{\text{ज्या }(९०^\circ+४५^\circ) - \text{कोज्या }(९०^\circ+३०^\circ)}{\text{ज्या }(९०^\circ+४५^\circ) + \text{कोज्या }(९०^\circ+३०^\circ)}$$

$$= \frac{\text{कोज्या }४५^\circ + \text{ज्या }३०^\circ}{\text{कोज्या }४५^\circ - \text{ज्या }३०^\circ}$$

$$=\frac{\frac{१}{\sqrt{२}}+\frac{१}{२}}{\frac{१}{\sqrt{२}}-\frac{१}{२}}=\frac{२+\sqrt{२}}{२-\sqrt{२}}$$

$$=\frac{(२+\sqrt{२})(२+\sqrt{२})}{(२-\sqrt{२})(२+\sqrt{२})}=\frac{६+४\sqrt{२}}{४-२}=३+२\sqrt{२}$$

अभ्यास ७

सिद्ध करो कि

(१) कोज्या $(१८०^\circ+म)=$ कोज्या $(म-१८०^\circ)$

(२) स्प $(९०^\circ+म)=$ कोस्प $(१८०^\circ-म)$

(३) व्युज्या $(-म)=$ व्युज्या $(१८०^\circ+म)$

(४) ज्या ७८०° कोज्या $३०^\circ+$ कोज्या ६०° ज्या (-३३०°) $=१$

(५) ज्या $११२५^\circ=\frac{१}{\sqrt{२}}$

(६) कोस्प $(९०^\circ+म)=-\frac{९९}{२०}$, यदि कोज्या म $=\frac{२०}{१०१}$ हो।

(७) व्युज्या^{२} थ $+$ व्युज्या^{२} $(९०^\circ-थ)$
$=$ व्युको^{२} थ $+$ व्युको^{२} $(९०^\circ-थ)$

(८) व्युज्या $(१८०^\circ+थ)+$ व्युको $(९०^\circ-थ)$
$=$ स्प$(२७०^\circ-थ)$ $+$ कोस्प $(३६०^\circ-थ)$

(९) यदि क, ख, ग किसी त्रिभुज के कोण हों तो सिद्ध करो कि

ज्या $\frac{क+ख+ग}{२}=$ $\frac{क}{२}$ स्प $\frac{ख+प}{२}$

सिद्ध करो कि

(१०) व्युको (२७०°−म) व्युको (९०°−म)−स्प (२७०°−म) स्प (९०°+म) = −१

(११) ज्या १५०° कोज्या १२०° + कोज्या ३३०° ज्या ६००° + १ = ०

(१२) कोज्या ३०६° + कोज्या २३४° + कोज्या १६२° + ज्या ७२° = ०

(१३) $\dfrac{\text{ज्या } (-३१०^\circ) + \text{स्प } २९०^\circ}{\text{कोस्प } २००^\circ + \text{कोज्या } ३६०^\circ} = -१$

(१४) ज्या (९०° + थ) कोज्या (१८०° − थ) कोस्प (२७०° + थ)
= ज्या (९०° − थ) ज्या (२७०° − थ) कोस्प (९०° + थ)

(१५) $\dfrac{\text{ज्या } (\pi - \text{थ})}{\text{स्प } \left(\dfrac{\pi}{२} + \text{थ}\right)} \cdot \dfrac{\text{कोज्या } (२\pi - \text{थ})}{\text{स्प } (\pi + \text{थ})} \cdot \dfrac{\text{कोस्प}\left(\dfrac{\pi}{२} - \text{थ}\right)}{\text{ज्या } (-\text{थ})}$

$= \text{ज्या थ}$

(१६) $\text{व्युको } (२\pi - \text{थ}) + \text{व्युज्या} \left(\dfrac{३\pi}{२} + \text{थ}\right)$

$- \text{व्युज्या} \left(\dfrac{\pi}{२} + \quad\right) + \text{व्युको थ} = ०$

(१७) $\dfrac{\text{कोज्या } (\pi - \text{थ})}{\text{स्प } (\pi - \text{थ})} \cdot \dfrac{\text{कोस्प } \left(\dfrac{\pi}{२} + \text{थ}\right)}{\text{स्प } \left(\dfrac{\pi}{२} - \text{थ}\right)} \cdot \dfrac{\text{ज्या } (२\pi - \text{थ})}{\text{कोज्या } (-\text{थ})}$

$= -\dfrac{\text{ज्या}^२ \text{ थ}}{\text{कोज्या थ}}$

सरल करो :—

$$(१८)\ \frac{\text{ज्या}\left(\frac{\pi}{२}-\text{थ}\right)}{\text{ज्या}\left(\frac{\pi}{२}+\text{थ}\right)} - \frac{\text{स्प}\left(\pi+\text{थ}\right)}{\text{कोज्या}\left(\frac{\pi}{२}+\text{थ}\right)}$$

(१९) स्प ७६५° कोस्प ३१५° + स्प २२५° कोस्प ४५°

$$(२०)\ \text{ज्या}^२\,\frac{\pi}{४}+\text{ज्या}^२\,\frac{३\pi}{४}+\text{ज्या}^२\,\frac{५\pi}{४}+\text{ज्या}^२\,\frac{७\pi}{४}$$

$$(२१)\ \frac{\text{ज्या}\left(-\text{थ}\right)}{\text{ज्या}\left(\pi+\text{थ}\right)} - \frac{\text{स्प}\left(\frac{\pi}{२}+\text{थ}\right)}{\text{कोस्प थ}} \div \frac{\text{कोज्या थ}}{\text{ज्या}\left(\frac{\pi}{२}+\text{थ}\right)}$$

$$(२२)\ \text{कोस्प थ} + \text{स्प}\left(\pi+\text{थ}\right) + \text{स्प}\left(\frac{\pi}{२}+\text{थ}\right) + \text{स्प}\left(२\pi-\text{थ}\right)$$

$$(२३)\ \frac{\text{ज्या}^२\left(\pi+\text{थ}\right)}{\text{कोज्या}^२\left(\frac{\pi}{२}+\text{थ}\right)} \cdot \frac{\text{स्प}\left(२\pi-\text{थ}\right)}{\text{व्युज्या}^२\,\text{थ}} \cdot \frac{\text{व्युको}^२\left(\pi-\text{थ}\right)}{\text{ज्या}\left(\pi-\text{थ}\right)}$$

$$(२४)\ \frac{\text{कोज्या}\left(\frac{\pi}{२}+\text{थ}\right)\text{व्युको}\left(-\text{थ}\right)\text{स्प}\left(\pi-\text{थ}\right)}{\text{व्युको}\left(२\pi+\text{थ}\right)\text{ज्या}\left(\pi+\text{थ}\right)\text{कोस्प}\left(\frac{\pi}{२}-\text{थ}\right)}$$

(२५) यदि क, ख, ग, घ किसी चतुर्भुज के कोण हों तो सिद्ध करो

$$\text{कोज्या}\,\frac{१}{२}\,(\text{क}+\text{ख}) + \text{कोज्या}\,\frac{१}{२}\,(\text{ग}+\text{घ}) = ०$$

यदि चतुर्भुज चक्रीय (cyclic) हो तो

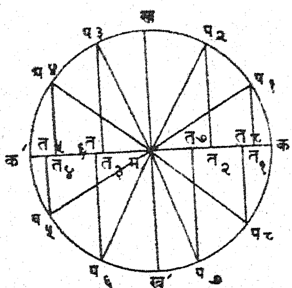
$$\text{कोज्या क} + \text{कोज्या ख} + \text{कोज्या ग} + \text{कोज्या घ} = ०$$

अध्याय ५

त्रिकोणमितीय निष्पत्तियों के लेखाचित्र

(Graphs of Trigonometrical Ratios)

(४०) किसी कोण के लगातार ०° से ३६०° तक बदलने पर उसकी ज्या के मान में परिवर्त्तन— Changes in the value of sine of an angle)



क' क और ख ख' दो सरल रेखायें लो जो म विन्दु पर परस्पर लम्ब हों। म विन्दु को केन्द्र मान कर एक वृत्त खींचो जिसकी त्रिज्या इकाई हो और जो कि इन रेखाओं को क', क; ख, ख' विन्दुओं पर काटे ।

मान लो चारों पादों (quadrants) में भ्रामक रेखा की स्थितियाँ भिन्न-भिन्न म प हैं और इनसे उत्पन्न कोण म है। सभी प बिन्दुओं से क' क रेखा पर लम्ब डालो।

$$\text{ज्या म} = \frac{\text{प त}}{\text{म प}}$$

$$= \text{प त (चूँकि म प इकाई के बराबर है)}$$

प्रथम पाद (First quadrant)—यदि कोण म = ०° है अर्थात् भ्रामक रेखा (revolving line) आदि-रेखा (initial line) पर है, तो प त = ०

∴ ज्या म = ०

किन्तु जैसे ही ∠म ०° से ९०° की ओर बढ़ता है प त की लम्बाई भी बढ़ती जाती है और ∠ म के ठीक ९०° होने पर प त = म ख = वृत्त की त्रिज्या = इकाई हो जाती है और धन चिह्नित रहती है।

∴ ज्या ९०° = १

अतः प्रथम पाद में कोण म के ०° से ९०° तक बढ़ने पर ज्या म का मान ० से १ तक बढ़ता जाता है।

द्वितीय पाद (Second quadrant)—जैसे-जैसे कोण म ९०° से १८०° तक बढ़ता जाता है प त की लम्बाई १ से घटती जाती है और जैसे ही प, क' बिन्दु पर आ जाता है प त की लम्बाई शून्य हो जाती है एवं धनचिह्नित रहती है।

∴ ज्या १८०° = ०

अतः द्वितीय पाद में कोण म के ९०° से १८०° तक बढ़ने पर ज्या म का मान १ से ० तक घटता जाता है।

तृतीय पाद (Third quadrant)—इस पाद में लम्बाई प त ऋणात्मक होती है जैसे-जैसे कोण म १८०° से २७०° तक बढ़ता जाता है, प त की लम्बाई ० से घटती जाती है और जैसे ही प, ख' बिन्दु पर आ जाता है प त की लम्बाई -१ हो जाती है

∴ ज्या २७०° = −१

अतः तृतीय पाद में कोण म के १८०° से २७०° तक बढ़ने पर ज्या म का मान ० से −१ तक घटता जाता है।

चतुर्थ पाद (Fourth quadrant)—इस पाद में भी प ऋणात्मक होती है। जैसे जैसे कोण म २७०° से ३६०° तक बढ़ता

जाता है, प त की लम्बाई -१ से बढ़ती जाती है और जैसे ही प, क विन्दु पर आ जाता है प त की लम्बाई ० हो जाती है

$\therefore$ ज्या ३६०° = ०

अतः चतुर्थ पाद में कोण म के २७०° से ३६०° तक बढ़ने पर ज्या म का मान –१ से ० तक बढ़ता जाता है।

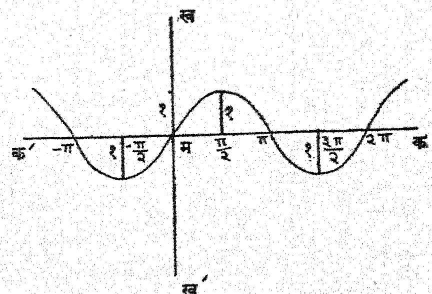
टिप्पणी—यदि भ्रामक रेखा ३६०° पूरा करने के बाद फिर चक्कर लगाती है तो भिन्न-भिन्न पादों में इन्हीं परिवर्त्तनों की पुनरावृत्ति होती रहती है।

(४१) र = ज्या य का लेखा चित्र (Graph of y = sin x)

दो सरल रेखायें क'क और ख ख' लो जो परस्पर लम्ब हों। मान लो वे रेखायें नियामक अक्ष (coordinate axes) हैं जिनमें क' क रेखा को भिन्न-भिन्न लम्बाइयाँ कोण के भिन्न-भिन्न मानों को एवं ख ख' रेखा की लम्बाइयाँ उनकी त्रि-निष्पत्तियों (trigonometrical ratios) के संगतमानों (corresponding values) को प्रदर्शित करती है

अगले पृष्ठ पर दी हुई सारिणी (०, ०) ; $\left(\frac{\pi}{६}, .५\right)$; $\left(\frac{\pi}{४}, .७\right)$...

इत्यादि विन्दुओं को प्रकट करती है जिनको अंकित करने एवं एक रेखा द्वारा मिलाने के पश्चात् निम्न लेखा चित्र बनता है,



य	०	$\frac{\pi}{६}$	$\frac{\pi}{४}$	$\frac{\pi}{३}$	$\frac{\pi}{२}$	$\frac{२}{३}\pi$	$\frac{३\pi}{४}$	$\frac{५}{६}\pi$	π
ज्या या अथवा र	०	$\frac{१}{२}$ $=.५$	$\frac{१}{\sqrt{२}}$ $=.७$	$\frac{\sqrt{३}}{२}$ $=.८७$	१	$\frac{\sqrt{३}}{२}$ $=.८७$	$\frac{१}{\sqrt{३}}$ $=.७$	$\frac{१}{२}$ $=.५$	०

य	$\frac{७}{६}\pi$	$\frac{५}{४}\pi$	$\frac{४}{३}\pi$	$\frac{३}{२}\pi$ $=-\frac{\pi}{२}$	$\frac{५}{३}\pi$ $=-\frac{\pi}{३}$	$\frac{७}{४}\pi$ $=-\frac{\pi}{४}$	$\frac{११}{६}\pi$ $=-\frac{\pi}{६}$	२π
ज्या या अथवा र	$\frac{१}{२}$ $=-.५$	$-\frac{१}{\sqrt{२}}$ $=-.७$	$-\frac{\sqrt{३}}{२}$ $=-.८७$	-१	$-\frac{\sqrt{३}}{२}$ $=-.८७$	$-\frac{१}{\sqrt{२}}$ $=-.७$	$-\frac{१}{२}$ $=-.५$	०

(४२) किसी कोण के लगातार ०° से ३६०° तक बदलने पर उसकी कोज्या के मान में परिवर्त्तन—(Changes in the value of cosine of an angle)

सूत्र ४० के चित्र में हम देखते हैं कि

$$\text{कोज्या म} = \frac{\text{म त}}{\text{म प}}$$

$$= \text{म त चूँकि म प इकाई के बराबर है}$$

प्रथम पाद (First Quadrant)—यदि कोण म = ०° है अर्थात् भ्रामक रेखा (revolving line) आदि रेखा (initial line) पर है तो

म त = म क = त्रिज्या = इकाई

∴ कोज्या ०° = म त = १

किन्तु जैसे ही कोण म, ०° से ९०° की ओर बढ़ता है, म त की लम्बाई घटने लगती है अतः उस दशा में कोज्या म का मान भी घटता जाता है और कोण म के ठीक ९०° होने पर म त रेखा लुप्त हो जाती है

∴ कोज्या ९०° = ०

अतः प्रथम पाद में कोण म के ०° से ९०° तक बढ़ने पर कोज्या म का मान १ से ० तक घटता जाता है।

द्वितीय पाद (Second Quadrant) इस पाद में लम्बाई म त ऋणात्मक होती है। जैसे जैसे कोण म ९०° से १८०° तक बढ़ता जाता है म त की लम्बाई—१ की ओर बढ़ती जाती है, और जैसे ही प, क' बिन्दु पर आ जाता है म त की लम्बाई -१ हो जाती है

∴ कोज्या १८०° = –१

अतः द्वितीय पाद में कोण म के ९०° से १८०° तक बढ़ने पर कोज्या म का मान ० से -१ तक घटता जाता है।

तृतीय पाद (Third Quadrant)—इस पाद में भी लम्बाई म त ऋणात्मक होती है। जैसे-जैसे कोण म १८०° से २७०° तक बढ़ता जाता है म त की लम्बाई का संख्यात्मक मान घटता जाता है और जैसे ही प, ख' बिन्दु पर आ जाता है म त रेखा लुप्त हो जाती है

∴ कोज्या २७०° = ०

अतः तृतीय पाद में कोण म के १८०° से २७०° तक बढ़ने पर कोज्या म का मान – १ से ० तक बढ़ता जाता है।

चतुर्थ पाद (Fourth Quadrant)—इस पाद में म त धनात्मक है। जैसे-जैसे कोण म २७०° से ३६०° तक बढ़ता जाता है म त की लम्बाई का संख्यात्मक मान बढ़ता जाता है और जैसे प, क बिन्दु पर आ जाता है म त रेखा की लम्बाई इकाई हो जाती है।

∴ कोज्या ३६०° = १

टिप्पणी—यदि भ्रामक रेखा ३६०° पूरा करने के बाद फिर चक्कर लगाती है तो भिन्न भिन्न पादों में इन्हीं परिवर्त्तनों की पुनरावृत्ति होती रहती है।

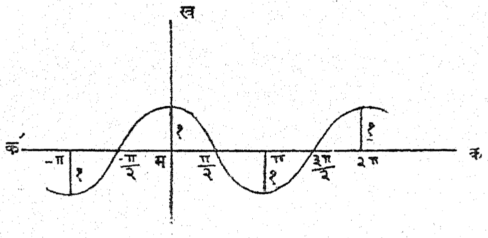
३) र = कोज्या य का लेखाचित्र (Graph of y = cos x)

दो सरल रेखायें क' क और ख ख' लो जो परस्पर लम्ब हों। मान लो वे रेखायें नयामक-अक्ष (coordinate axes) हैं जिनकी क' क रेखा की भिन्न-भिन्न लम्बाइयाँ कोण के भिन्न-भिन्न मानों को एवं ख ख' रेखा की लम्बाइयाँ उनकी त्रि-निष्पत्तियों (trigonometrical ratios) के संगतमानों (corresponding values) को प्रदर्शित करती हैं

अगले पृष्ठ पर दी हुई सारिणी (०, १) $(\frac{\pi}{६}, .८७)$ $(\frac{\pi}{४}, .७)$... बिन्दुओं को प्रकट करती है जिनको अंकित करने एवं एक रेखा द्वारा मिलाने के पश्चात् पृष्ठ ७६ पर दिया हुआ लेखा चित्र बनता है।

य	०	$\frac{\pi}{६}$	$\frac{\pi}{४}$	$\frac{\pi}{३}$	$\frac{\pi}{२}$	$\frac{२}{३}\pi$	$\frac{३}{४}\pi$	$\frac{५}{६}\pi$	π
कोज्या य अथवा र	१	$\frac{\sqrt{३}}{२} = ·८७$	$\frac{१}{\sqrt{२}} = ·७$	$\frac{१}{२} = ·५$	०	$-\frac{१}{२} = -·५$	$-\frac{१}{\sqrt{२}} = -·७$	$-\frac{\sqrt{३}}{२} = -·८७$	-१

य	$\frac{७}{६}\pi$	$\frac{५}{४}\pi$	$\frac{४}{३}\pi$	$\frac{३}{२}\pi = -\frac{\pi}{२}$	$\frac{५}{३}\pi = -\frac{\pi}{३}$	$\frac{७}{४}\pi = -\frac{\pi}{४}$	$\frac{११}{६}\pi = -\frac{\pi}{६}$	२π
कोज्या य अथवा र	$-\frac{\sqrt{३}}{२} = -·८७$	$-\frac{१}{\sqrt{२}} = -·७$	$-\frac{१}{२} = -·५$	०	$\frac{१}{२} = ·५$	$\frac{१}{\sqrt{२}} = ·७$	$\frac{\sqrt{३}}{२} = ·८७$	१



(४४) किसी कोण के लगातार ०° से ३६०° तक बदलने पर उसके स्प के मान में परिवर्त्तन (Changes in the value of tangent of an angle)

सूक्त ४० के चित्र में हम देखते हैं कि

$$स्प\ म = \frac{प\ त}{म\ त}$$

प्रथम पाद—यदि कोण म = ०° है अर्थात् भ्रामक रेखा आदि रेखा पर है तो प त = ०

$$\therefore स्प\ म = \frac{०}{म\ त} = ०$$

किन्तु जैसे ही कोण ०° से $\frac{\pi}{२}$ की ओर बढ़ता है प त की लम्बाई बढ़ती जाती है और म त की लम्बाई घटती जाती है, किन्तु कोण म के ९०° हो जाने पर म त शून्य हो जाती है अतः उस दशा में

$$स्प\ ९०° = \frac{प\ त}{०} = +\infty \text{ हो जाता है}$$

अतएव प्रथम पाद में कोण म के ०° से ९०° तक बढ़ने पर स्प म का मान ० से $+\infty$ की ओर बढ़ता जाता है।

द्वितीय पाद—इस पाद में प त धनात्मक है किन्तु म त ऋणात्मक। अतः जैसे ही कोण म, $\frac{\pi}{२}$ से थोड़ा ही बढ़ता है म त के ऋणात्मक हो जाने के कारण स्प म + ∞ से एकदम − ∞ हो जाता है और जैसे-जैसे कोण म, ९०° से १८०° होता जाता है प त की लम्बाई छोटी होती जाती है। जैसे ही प, क' विन्दु पर आ जाता है प त की लम्बाई शून्य हो जाती है

$$\therefore \text{स्प } १८०^\circ = \frac{\text{प त}}{\text{म त}} = ०$$

अतः द्वितीय पाद में कोण म के ९०° से १८०° तक बढ़ने पर स्प म का मान − ∞ से ० तक बढ़ता जाता है।

तृतीय पाद—इस पाद में प त और म त दोनों ही ऋणात्मक हैं। अतः स्प म धनात्मक ही रहेगा। जैसे-जैसे कोण म १८०° से २७०° होता जाता है, प त बढ़ती जाती है और म त छोटी होती जाती है और जैसे ही प, ख' विन्दु पर आ जाता है म त लुप्त हो जाती है

$$\therefore \text{स्प } २७०^\circ = \frac{\text{प त}}{०} = \infty$$

अतः तृतीय पाद में कोण म के १८०° से २७०° तक बढ़ने पर स्प म का मान ० से + ∞ तक बढ़ता जाता है।

चतुर्थ पाद—इस पाद में म त धनात्मक होती है किन्तु प त ऋणात्मक, जैसे ही कोण म, २७०° से थोड़ा ही बढ़ता है प त के ऋणात्मक हो जाने के कारण स्प म + ∞ से एकदम − ∞ हो जाता है। जैसे जैसे कोण म २७०° से ३६०° होता जाता है प त छोटी होती जाती है और म त बढ़ती जाती है और जैसे ही प, क विन्दु पर आ जाता है प त लुप्त हो जाती है।

$$\therefore \text{स्प } ३६०^\circ = \frac{०}{\text{म त}} = ०$$

अतः चतुर्थ पाद में कोण म के २७०° से ३६०° तक बढ़ने पर स्प म का मान $-\infty$ से ० की ओर बढ़ने लगता है।

टिप्पणी—यदि भ्रामक रेखा ३६०° पूरा करने के बाद फिर चक्कर लगाती है तो भिन्न-भिन्न पादों में इन्हीं परिवर्त्तनों की पुनरावृत्ति होती रहती है।

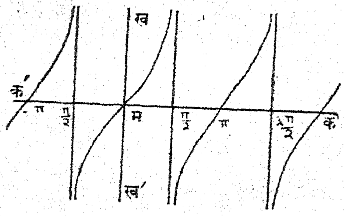
(४५) र = स्प य का लेखाचित्र (Graph of y = tan x)

दो सरल रेखायें क' क और ख ख' लो जो परस्पर लम्ब हों। मान लो वे रेखायें नियामक-अक्ष (co-ordinate axes) हैं जिनमें क' क रेखा की भिन्न-भिन्न लम्बाइयाँ कोण के भिन्न-भिन्न मानों को एवं ख ख' रेखा की लम्बाइयां उनकी त्रिनिष्पत्तियों (trigonometrical ratios) के संगत मानों (corresponding values) को प्रदर्शित करती हैं।

य	स्प य = र
०	०
π/६	१/√३ = ·५८
π/४	१
π/३	√३ = १·७
π/२ +	+ ∞
π/२ −	− ∞
२π/३	−√३ = −१·७
३π/४	− १
५π/६	−१/√३ = −·५८
π	०

य	र = ज्याय
७π/६	१/√३ = ·५८
५π/४	१
४π/३	√३ = १·७
३π/२ −	+ ∞
३π/२ +	− ∞
५π/३	−√३ = −१·७
७π/४ = −π/४	− १
११π/६ = −π/६	−१/√३ = −·५८
२π	०

उपर्युक्त सारिणी (०,०), $\left(\frac{\pi}{६}, .५८\right)$ $\left(\frac{\pi}{४},१\right)$... ..इत्यादि विन्दु प्रकट करती है जिनको अंकित करने एवं एक रेखा द्वारा मिलाने के पश्चात् निम्न लेखा चित्र बनता है।



(४६) किसी कोण के लगातार ०° से ३६०° तक बदलने पर उसकी व्युज्या के मान में परिवर्त्तन (Changes in the value of cosecant of an angle)

$$\text{व्युज्या म} = \frac{१}{\text{ज्या म}}$$

अतः

प्रथम पाद में जब कोण म ०° से ९०° तक बढ़ता जाता है व्युज्या म का मान $+\infty$ से १ तक घटता जाता है।

द्वितीय पाद में व्युज्या म का मान १ से $+\infty$ तक बढ़ता जाता है

तृतीय पाद में जैसे ही कोण म १८०° से थोड़ा सा ही बढ़ता है व्युज्या म का मान प त के ऋणात्मक हो जाने के कारण $+\infty$ से एकदम $-\infty$ हो जाता है और जैसे ही कोण म १८०° से २७०° की ओर बढ़ता है, व्युज्या म का मान $-\infty$ से $-$१ की ओर बढ़ने लगता है।

चतुर्थ पाद में जैसे ही कोण २७०° से ३६०° की ओर बढ़ता है व्युज्या म का मान $-$१ से $-\infty$ की ओर घटने लगता है।

किन्तु जैसे ही म ३६०° को पार करता है व्युज्या म का मान एकदम $-\infty$ से $+\infty$ हो जाता है।

टिप्पणी—यदि भ्रामक रेखा ३६०° पूरा करने के बाद फिर चक्कर लगाती है तो भिन्न-भिन्न पादों में इन्हीं परिवर्त्तनों की पुनरावृत्ति होती रहती है।

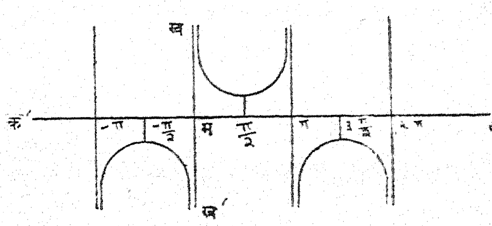
(४७) र = व्युज्या य का लेखाचित्र (Graph of y = cosec x)

दो सरल रेखायें क' क और ख ख' लो जो परस्पर लम्ब हों। मान लो वे रेखायें नियामक-अक्ष (co-ordinate axes) हैं जिनकी क' क रेखा की भिन्न-भिन्न लम्बाइयाँ कोण के भिन्न-भिन्न मानों को एवं ख ख' रेखा की लम्बाइयाँ उनकी त्रि-निष्पत्तियों (trigonometrical ratios) के संगत मानों (corresponding values) को प्रदर्शित करती हैं।

य	०−	०+	$\frac{\pi}{६}$	$\frac{\pi}{४}$	$\frac{\pi}{३}$	$\frac{\pi}{२}$	$\frac{२\pi}{३}$	$\frac{३\pi}{४}$	$\frac{५\pi}{६}$	π−	π+
व्युज्या य = र	−∞	+∞	२	$\sqrt{२}$ = १.४	$\frac{२}{\sqrt{३}}$ = १.१	१	$\frac{२}{\sqrt{३}}$ = १.१	$\sqrt{२}$ = १.४	२	+∞	−∞

य	$\frac{७\pi}{६}$	$\frac{५\pi}{४}$	$\frac{४\pi}{३}$	$\frac{३\pi}{२} = -\frac{\pi}{२}$	$\frac{५\pi}{३} = -\frac{\pi}{३}$	$\frac{७\pi}{४} = -\frac{\pi}{४}$	$\frac{११\pi}{६} = -\frac{\pi}{६}$	२π−	२π+
व्युज्या य = र	−२	$-\sqrt{२}$ = −१.४	$\frac{-२}{\sqrt{३}}$ = −१.१	−१	$\frac{-२}{\sqrt{३}}$ = −१.१	$-\sqrt{२}$ = −१.४	−२	−∞	+∞

उपर्युक्त सारिणी (० −, − ∞), (० +, + ∞), ($\frac{\pi}{६}$, १)······ इत्यादि विन्दुओं को प्रकट करती है जिनको अंकित करने एवं रेखा द्वारा मिलाने के पश्चात् निम्न लेखाचित्र (graph) बनता है :—



(४८) किसी कोण के लगातार ०° से ३६०° तक बदलने पर उसके व्युको के मान में परिवर्त्तन (Changes in the value of secant of an angle)

$$\text{व्युको म} = \frac{१}{\text{कोज्या म},} \text{ अतः}$$

प्रथम पाद में जब कोण म ०° से ६०° तक बढ़ता जाता है, व्युको म का मान १ से ∞ तक घटता जाता है।

द्वितीय पाद में जैसे ही कोण ६०° से थोड़ा सा बढ़ता है, व्युको म (sec) का मान म त के ऋणात्मक हो जाने के कारण + ∞ से एकदम − ∞ हो जाता है और जैसे ही म, ६०° से १८०° की ओर बढ़ता है व्युको म का मान − ∞ से − १ की ओर बढ़ने लगता है।

तृतीय पाद में जब कोण १८०° से २७०° की ओर बढ़ता है व्युको म का मान − १ से − ∞ की ओर घटने लगता है।

चतुर्थ पाद में जैसे ही कोण आता है व्युको म का मान एकदम − ∞ से + ∞ हो जाता है क्योंकि म त रेखा फिर धनात्मक हो

जाती है, और ज्यों-ज्यों कोण २७०° से ३६०° की ओर बढ़ता है, व्युको म का मान $+\infty$ से $+$ १ की ओर घटने लगता है।

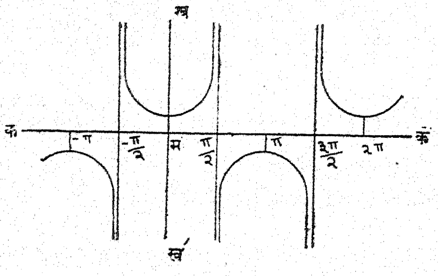
(४६) र = व्युको य का लेखाचित्र (Graph of y = sec x)

दो सरल रेखायें क′ क और ख ख′ लो जो परस्पर लम्ब हों। मानलो वे रेखायें नियामक अक्ष (Co-ordinate axes) हैं जिनमें क′ क रेखा की भिन्न-भिन्न लम्बाइयाँ कोण के भिन्न-भिन्न मानों को एवं ख ख′ रेखा की लम्बाइयाँ उनकी त्रिनिष्पत्तियों (trigonometrical ratics) के संगत मानों (corresponding values) को प्रदर्शित करती हैं।

य	०	$\frac{\pi}{६}$	$\frac{\pi}{४}$	$\frac{\pi}{३}$	$\frac{\pi}{२}-$	$\frac{\pi}{२}+$	$\frac{२}{३}\pi$	$\frac{३}{४}\pi$	$\frac{५}{६}\pi$	π
र = व्युको य	१	$\frac{२}{\sqrt{३}}$ = १.२	$\sqrt{२}$ = १.४	२	$+\infty$	$-\infty$	−२	$-\sqrt{२}$ = −१.४	$-\frac{२}{\sqrt{३}}$ = −१.२	−१

य	$\frac{७}{६}\pi$	$\frac{५}{४}\pi$	$\frac{४}{३}\pi$	$\frac{३\pi}{२}-$	$\frac{३}{२}\pi+$	$\frac{५}{३}\pi = -\frac{\pi}{३}$	$\frac{७}{४}\pi = -\frac{\pi}{४}$	$\frac{११}{६}\pi = -\frac{\pi}{६}$	२π
र = व्युको य	$-\frac{२}{\sqrt{३}}$ = −१.२	$-\sqrt{२}$ = −१.४	−२	$-\infty$	$+\infty$	२	$\sqrt{२}$ = १.४	$\frac{२}{\sqrt{३}}$ = १.२	१

उपर्युक्त सारिणी (०,१) ; $\left(\frac{\pi}{६}, १.२\right)$...... इत्यादि बिन्दुओं को प्रकट करती है जिनको अंकित करने एवं मिलाने के पश्चात् निम्न लेखाचित्र (graph) बनता है :—



(५०) किसी कोण के लगातार ०° से ३६०° तक बदलने पर उसके कोस्प के मान में परिवर्त्तन (Changes in the value of cotangent of an angle)

$$\text{कोस्प म} = \frac{१}{\text{स्प म}}, \text{ अतः}$$

प्रथम पाद में जब कोण ०° से ६०° तक बढ़ता है, कोस्प म +∞ से ० की ओर घटने लगता है।

द्वितीय पाद में जब कोण ६०° से १८०° तक बढ़ता है कोस्प म ० से −∞ की ओर बढ़ने लगता है।

तृतीय पाद में जैसे ही कोण १८०° से थोड़ा सा बढ़ता है, कोस्प म त प और म त दोनों के ऋणात्मक हो जाने के कारण −∞ से एकदम +∞ हो जाता है और जैसे-जैसे कोण १८०° से २७०° तक बढ़ने लगता है कोस्प म +∞ से ० की ओर घटने लगता है।

चतुर्थ पाद में जब म २७०° से ३६०° तक बढ़ता है कोस्प म ० से −∞ की ओर घटने लगता है और जैसे ही कोण ३६०° को पार करके दूसरा चक्कर प्रारम्भ करता है कोस्प म एकदम −∞ से +∞ हो जाता है और फिर इन्हीं परिवर्त्तनों की पुनरावृत्ति होती रहती है।

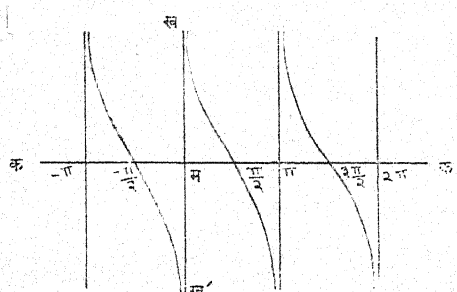
(५१) र = कोस्प य का लेखाचित्र (Graph of y = cot x)

य	०−	०+	π/६	π/४	π/३	π/२	२π/३	३π/४	५π/६	π−	π+
र = कोस्प य	−∞	+∞	√३ = १.७	१	१/√३ = .५८	0	−१/√३ = −.५८	−१	−√३ = −१.७	−∞	+∞

य	७π/६	५π/४	४π/३	३π/२ = −π/२	५π/३ = −π/३	७π/४ = −π/४	११π/६ = −π/६	२π−	२π+
र = कोस्प य	√३ = १.७	१	१/√३ = .५८	०	−१/√३ = −.५८	−१	−√३ = −१.७	−∞	+∞

दो सरल रेखायें क′ क और ख ख′ लो जो परस्पर लम्ब हों। मान लो वे रेखायें नियामक अक्ष (co-ordinate axes) हैं जिनकी क′ क रेखा की भिन्न-भिन्न लम्बाइयाँ कोण के भिन्न-भिन्न मानों को एवं ख ख′ रेखा की लम्बाइयाँ उनकी त्रि-निष्पत्तियों (trigonometrical ratios) के संगत मानों (corresponding values) को प्रदर्शित करती हैं।

पिछले पृष्ठ पर दी हुई सारणी (०−, −∞); (०+, +∞); $\left(\frac{\pi}{6}, १.७\right)$ ......इत्यादि विन्दुओं को प्रकट करती है जिनको अंकित करने एवं मिलाने के पश्चात् निम्न लेखाचित्र बनता है :—



(५२) उदाहरण—यदि म = १२०° हो तो व्यंजक (expression) ज्या म + कोज्या म का क्या चिह्न होगा ?

ज्या म + कोज्या म = ज्या १२०° + कोज्या १२०°

= ज्या (९०° + ३०°) + कोज्या (९०° + ३०°)

= कोज्या ३०° − ज्या ३०°

किन्तु कोज्या ३०° > ज्या ३०°

अतः इस व्यंजक का चिह्न धन होगा।

अभ्यास ८

म के निम्नलिखित मानों के लिये व्यंजक (expression) ज्या म + कोज्या म का क्या चिह्न होगा ?

(१) १३०° (२) १६०°

(३) २७८° (४) -३१०°

(५) ४३०° (६) -२०°

म के निम्नलिखित मानों के लिये व्यंजक (expression) ज्या म − कोज्या म का क्या चिन्ह होगा ?

(७) ३००° (८) २००°

(९) -७०° (१०) -३५६°

(११) -७५३° (१२) -५°

(१३) कोज्या (९० + थ) का मान बताओ और उसकी सत्यता (truth) भी सिद्ध करो। ($थ < ९०^\circ$)

यदि थ = १००° हो तो ज्या थ + कोज्या थ का क्या चिह्न होगा ? कारण भी दो।

(उत्तर प्रदेश १९४८)

निम्नलिखित के लेखाचित्र (graphs) बनाओ :—

(१४) र = ज्या २ य (० से १८०° तक)

(१५) र = स्प $\frac{य}{२}$ $\left(-\frac{\pi}{२} \text{ से } \pi \text{ तक}\right)$

(१६) र = ज्या य + कोज्या य (० से २ π तक)

(कलकत्ता १९३४)

(१७) र = ज्या य और र = कोज्या य के (० से π तक) लेखाचित्र खींचो और उन दोनों के कटाव के बिन्दु भी ज्ञात करो।

(कलकत्ता १९३६)

(१८) र = ज्या $\left(य + \frac{\pi}{४}\right)$ का लेखाचित्र खींचो ($-\frac{३}{४}\pi$ से $\frac{३}{४}\pi$ तक)

(पटना १९३७)

अध्याय ६

दो कोणों के योग एवं अन्तर की त्रिकोणमितीय निष्पत्तियाँ

(Trigonometrical Ratios of the Sum and the Difference of two angles)

(५३) सिद्ध करो कि

(१) ज्या (क + ख) = ज्या क कोज्या ख + कोज्या क ज्या ख

$\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$

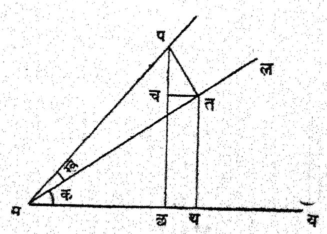
(२) कोज्या (क + ख) = कोज्या क कोज्या ख − ज्या क ज्या ख

$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$

(३) स्प (क + ख) $= \dfrac{\text{स्प क} + \text{स्प ख}}{१ - \text{स्प क स्प ख}}$

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

जहाँ कि क, ख और (क + ख) धनात्मक न्यून कोण हैं।



(१) मान लो कि भ्रामक रेखा (revolving line) अपने आदि स्थान (initial position) म य से म ल तक कोण क

बनाती है और फिर आगे बढ़कर म ल के साथ कोण ख बनाती है। म प भ्रामक रेखा की अन्तिम स्थिति है।

अतः कोण य म प = क + ख

म प के किसी बिन्दु प से म य पर प छ और म ल पर प त लम्ब खींचो। प त लम्ब के पादबिन्दु (foot of the perpendicular) त से म य और प छ पर क्रमशः त थ और त च लम्ब खींचो।

$$\angle \text{त प च} = 90^\circ - \angle \text{प त च} = \angle \text{च त म}$$
$$= \angle \text{त म थ}$$
$$= \angle \text{क}$$

अतः ज्या (क + ख) = ज्या य म प

$$= \frac{\text{छ प}}{\text{म प}}$$

$$= \frac{\text{छ च} + \text{च प}}{\text{म प}}$$

$$= \frac{\text{थ त}}{\text{म प}} + \frac{\text{च प}}{\text{म प}}$$

$$= \frac{\text{त थ}}{\text{म प}} + \frac{\text{प च}}{\text{म प}}$$

$$= \frac{\text{त थ}}{\text{म त}} \cdot \frac{\text{म त}}{\text{म प}} + \frac{\text{प च}}{\text{प त}} \cdot \frac{\text{प त}}{\text{म प}}$$

= ज्या क कोज्या ख + कोज्या क ज्या ख

∴ ज्या (क + ख) = ज्या क कोज्या ख + कोज्या क ज्या ख

$\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$

(२) कोज्या (क + ख) = कोज्या य म र = $\frac{\text{म छ}}{\text{म प}}$

$$= \frac{\text{म थ} - \text{छ थ}}{\text{म प}} = \frac{\text{म थ}}{\text{म प}} - \frac{\text{छ थ}}{\text{म प}}$$

$$= \frac{\text{म थ}}{\text{म प}} - \frac{\text{च त}}{\text{म प}}$$

$$= \frac{\text{म थ}}{\text{म त}} \cdot \frac{\text{म त}}{\text{म प}} - \frac{\text{च त}}{\text{प त}} \cdot \frac{\text{प त}}{\text{म प}}$$

= कोज्या क. कोज्या ख − ज्या क. ज्या ख

∴ कोज्या (क + ख) = कोज्या क कोज्या ख − ज्या क ज्या ख

$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$

(३) स्प (क + ख) = स्प य म प = $\frac{\text{छ प}}{\text{म छ}}$

$$= \frac{\text{छ च} + \text{च प}}{\text{म थ} - \text{छ थ}} = \frac{\text{त थ} + \text{च प}}{\text{म थ} - \text{छ थ}}$$

$$= \frac{\text{त थ} + \text{प त कोज्या क}}{\text{म थ} - \text{प त ज्या क}}$$

(हर और अंश दोनों में म थ का भाग देने पर)

$$= \frac{\frac{\text{त थ}}{\text{म थ}} + \frac{\text{प त}}{\text{म थ}} \cdot \frac{\text{म थ}}{\text{म त}}}{१ - \frac{\text{प त}}{\text{म थ}} \cdot \frac{\text{त थ}}{\text{म त}}}$$

$$= \frac{\frac{\text{त थ}}{\text{म थ}} + \frac{\text{प त}}{\text{म त}}}{१ - \frac{\text{त थ}}{\text{म थ}} \cdot \frac{\text{प त}}{\text{म त}}}$$

$$= \frac{\text{स्प क} + \text{स्प ख}}{१ - \text{स्प क स्प ख}}$$

$$\text{स्प}\,(\text{क}+\text{ख})=\frac{\text{स्प क}+\text{स्प ख}}{१-\text{स्प क स्प ख}}$$

$$\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$$

(५४) ऊपर हमने क, ख और क + ख को धनात्मक न्यून कोण मान कर ही सिद्ध किया है। किन्तु यदि क, ख किसी भी परिमाण के कोण लिये जायँ तब भी यही प्रमाण पर्याप्त होगा, केवल प्रयोग में आई हुई राशियों के चिह्नों को ध्यान में रखना आवश्यक है।

फिर भी बिना किसी नई आकृति के इन्हें इस प्रकार भी सिद्ध किया जा सकता है :

मान लो कि क और ख दोनों ही न्यून कोण हैं और क′ = ९०° + क

अतः ज्या क′ = कोज्या क, कोज्या क′ = − ज्या क

इस प्रकार ज्या (क′ + ख) = ज्या (९०° + क + ख)
= कोज्या (क + ख)
= कोज्या क कोज्या ख − ज्या क ज्या ख
= ज्या क′ कोज्या ख + कोज्या क′ ज्या ख

तथा कोज्या (क′ + ख) = कोज्या (९०° + क + ख)
= − ज्या (क + ख)
= − ज्या क कोज्या ख − कोज्या क ज्या ख
= कोज्या क′ कोज्या ख − ज्या क′ ज्या ख

यदि ख भी अधिक कोण हो तो हम इन सूत्रों को इसी प्रकार सिद्ध कर सकते हैं। क″ = ९०° + क′ रख कर इन सूत्रों को तब भी सिद्ध कर सकते हैं जब कि ये कोण १८०° से अधिक हों।

अतः ये सूत्र सभी परिमाण के कोणों के लिये सत्य हैं।

त्रिकोणमिति में इन्हें योग सूत्र (Addition Theorem) कहा जाता है।

(५५) सिद्ध करो कि

(१) ज्या (क − ख) = ज्या क कोज्या ख − कोज्या क ज्या ख

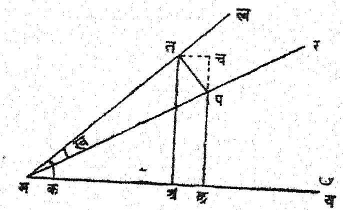
$\sin (A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$

(२) कोज्या (क − ख) = कोज्या क कोज्या ख + ज्या क ज्या ख

$\cos (A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$

(३) स्प (क − ख) = $\dfrac{\text{स्प क} - \text{स्प ख}}{१ + \text{स्प क स्प ख}}$

$$\tan (A + B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$$



मान लो कि भ्रामक रेखा (revolving line) अपने आदि स्थान (initial position) म य से म ल तक कोण क बनाती है और फिर दक्षिणावर्त (clockwise) घूमकर म ल के साथ कोण ख बनाती है। म र इसकी नयी स्थिति है।

अतः कोण य म र = क − ख

म र के किसी विन्दु प से म य और म ल पर क्रमशः प द और प त लम्ब खींचो। लम्ब प त के पाद विन्दु (foot of the perpendicular) त से म य पर त थ और प छ पर (बढ़ाकर) त च लम्ब खींचो।

$\angle$त प च = ९०° − $\angle$प त च = $\angle$च त ल

= $\angle$त म य = $\angle$क

अतएव (१) $ज्या\ (क-ख)=\frac{प\ छ}{म\ प}=\frac{च\ छ-च\ प}{म\ प}$

$$=\frac{च\ छ}{म\ प}-\frac{च\ प}{म\ प}=\frac{त\ थ}{म\ प}-\frac{च\ प}{म\ प}$$

$$=\frac{त\ थ}{म\ त}\cdot\frac{म\ त}{म\ प}-\frac{च\ प}{त\ प}\cdot\frac{त\ प}{म\ प}$$

$$=ज्या\ क\ कोज्या\ ख-कोज्या\ क\ ज्या\ ख$$

$\therefore$ ज्या (क − ख) = ज्या क कोज्या ख − कोज्या क ज्या ख

$\sin (A-B)=\sin A \cos B-\cos A \sin B$

(२) $कोज्या\ (क-ख)=\frac{म\ छ}{म\ प}=\frac{म\ थ+थ\ छ}{म\ प}$

$$=\frac{म\ थ}{म\ प}+\frac{त\ च}{म\ प}$$

$$=\frac{म\ थ}{म\ त}\cdot\frac{म\ त}{म\ प}+\frac{त\ च}{त\ प}\cdot\frac{त\ प}{म\ प}$$

$$=कोज्या\ क\ कोज्या\ ख+ज्या\ क\ ज्या\ ख$$

$\therefore$ कोज्या (क − ख) = कोज्या क कोज्या ख + ज्या क ज्या ख

$\cos (A-B)=\cos A \cos B+\sin A \sin B$

(३) $स्प\ (क-ख)=\frac{प\ छ}{म\ छ}=\frac{च\ छ-च\ प}{म\ थ+थ\ छ}$

$$=\frac{त\ थ-त\ प\ कोज्या\ क}{म\ थ+त\ प\ ज्या\ क}$$

$$=\frac{त\ थ-त\ प\cdot\frac{म\ थ}{म\ त}}{म\ थ+त\ प\cdot\frac{त\ थ}{म\ त}}$$

(हर और अंश दोनों में म थ का भाग देकर)

$$= \frac{\frac{त\,थ}{म\,थ} - \frac{त\,प}{म\,थ} \cdot \frac{म\,थ}{म\,प}}{१ + \frac{त\,थ}{म\,थ} \cdot \frac{त\,प}{म\,त}}$$

$$= \frac{स्प\,क - स्प\,ख}{१ + स्प\,क\,स्प\,ख}$$

$$\therefore स्प\,(क + ख) = \frac{स्प\,क - स्प\,ख}{१ + स्प\,क\,स्प\,ख}$$

$$\tan(A + B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$$

(५६) ऊपर हमने क, ख और क+ख को धनात्मक न्यून कोण मान कर ही सिद्ध किया है। किन्तु यदि क, ख किसी भी परिमाण के कोण लिये जायँ तब भी ये प्रमाण पर्याप्त होंगे, केवल प्रयोग में आई हुई राशियों के चिह्नों को ध्यान में रखना आवश्यक है। फिर भी बिना किसी नये चित्र के इस प्रकार भी सिद्ध किये जा सकते हैं :

मान लो क और ख दोनों ही न्यून कोण हैं और $क' = ९०^\circ + क$

अतः ज्या $क'$ = कोज्या क, कोज्या $क'$ = − ज्या क

ज्या ($क'$ − ख) = ज्या (९० + क − ख)

= कोज्या (क − ख)

= कोज्या क कोज्या ख + ज्या क ज्या ख

= ज्या $क'$ कोज्या ख − कोज्या $क'$ ज्या ख

और कोज्या ($क'$ − ख) = कोज्या (९० + क − ख)

= − ज्या (क − ख)

= − ज्या क कोज्या ख + कोज्या क ज्या ख

= कोज्या $क'$ कोज्या ख + ज्या $क'$ ज्या ख

इस प्रकार उपर्युक्त सूत्रों को किसी भी परिमाण के कोणों के लिये सिद्ध किया जा सकता है।

त्रिकोणमिति में इन्हें व्यवकलन सूत्र (Theorem of subtraction) कहा जाता है।

(५७) स्प (क + ख) और स्प (क − ख) के मान के द्वितीय प्रमाण—

$$\text{स्प (क + ख)} = \frac{\text{ज्या (क + ख)}}{\text{कोज्या (क + ख)}}$$

$$= \frac{\text{ज्या क कोज्या ख} + \text{कोज्या क ज्या ख}}{\text{कोज्या क कोज्या ख} - \text{ज्या क ज्या ख}}$$

(अंश और हर दोनों में कोज्या क. कोज्या ख का भाग देकर)

$$= \frac{\frac{\text{ज्या क}}{\text{कोज्या}} + \frac{\text{ज्या ख}}{\text{कोज्या ख}}}{1 - \frac{\text{ज्या क}}{\text{कोज्या क}} \cdot \frac{\text{ज्या ख}}{\text{कोज्या ख}}}$$

$$= \frac{\text{स्प क} + \text{स्प ख}}{1 - \text{स्प क स्प ख}}$$

$$\text{स्प (क − ख)} = \frac{\text{ज्या (क − ख)}}{\text{कोज्या (क − ख)}}$$

$$= \frac{\text{ज्या क कोज्या ख} - \text{कोज्या क ज्या ख}}{\text{कोज्या क कोज्या ख} + \text{ज्या क ज्या ख}}$$

(अंश और हर दोनों में कोज्या क कोज्या ख का भाग देकर)

$$= \frac{\frac{\text{ज्या क}}{\text{कोज्या क}} - \frac{\text{ज्या ख}}{\text{कोज्या ख}}}{1 + \frac{\text{ज्या क}}{\text{कोज्या क}} \cdot \frac{\text{ज्या ख}}{\text{कोज्या ख}}}$$

$$= \frac{\text{स्प क} - \text{स्प ख}}{1 + \text{स्प क स्प ख}}$$

(५८) सिद्ध करो कि

$$\text{कोस्प }(\text{क}+\text{ख})=\frac{\text{कोस्प क}\cdot\text{कोस्प ख}-१}{\text{कोस्प क}+\text{कोस्प ख}}$$

$$\cot(A+B)=\frac{\cot A\cot B-1}{\cot A+\cot B}$$

$$\text{कोस्प }(\text{क}+\text{ख})=\frac{\text{कोज्य }(\text{क}+\text{ख})}{\text{ज्या }(\text{क}+\text{ख})}$$

$$=\frac{\text{कोज्या क कोज्या ख}-\text{ज्या क ज्या ख}}{\text{ज्या क कोज्या ख}+\text{कोज्या क ज्या ख}}$$

(अंश और हर दोनों में ज्या क. ज्या ख का भाग देकर)

$$=\frac{\dfrac{\text{कोज्या क कोज्या ख}}{\text{ज्या क ज्या ख}}-१}{\dfrac{\text{कोज्या ख}}{\text{ज्या ख}}+\dfrac{\text{कोज्या क}}{\text{ज्या क}}}$$

$$=\frac{\text{कोस्प क कोस्प ख}-१}{\text{कोस्प क}+\text{कोस्प ख}}$$

इसी प्रकार हम सिद्ध कर सकते हैं कि

$$\text{कोस्प }(\text{क}-\text{ख})=\frac{\text{कोस्प क कोस्प ख}+१}{\text{कोस्प ख}-\text{कोस्प क}}$$

(५९) उदाहरण १—ज्या ७५°, कोज्या १५° और स्प ७५° का मान निकालो।

$$\text{ज्या }७५^\circ=\text{ज्या }(४५^\circ+३०^\circ)$$

$$=\text{ज्या }४५^\circ\text{ कोज्या }३०^\circ+\text{कोज्या }४५^\circ\text{ ज्या }३०^\circ$$

$$=\frac{१}{\sqrt{२}}\cdot\frac{\sqrt{३}}{२}+\frac{१}{\sqrt{२}}\cdot\frac{१}{२}$$

$$=\frac{\sqrt{३}+१}{२\sqrt{२}}$$

$$\text{कोज्या } १५^\circ = \text{कोज्या } (४५^\circ - ३०^\circ)$$
$$= \text{कोज्या } ४५^\circ \text{ कोज्या } ३०^\circ + \text{ज्या } ४५^\circ \text{ ज्या } ३०^\circ$$
$$= \frac{१}{\sqrt{२}} \cdot \frac{\sqrt{३}}{२} + \frac{१}{\sqrt{२}} \cdot \frac{१}{२}$$
$$= \frac{\sqrt{३}+१}{२\sqrt{२}}$$

$$\text{स्प } ७५^\circ = \text{स्प } (४५^\circ + ३०^\circ)$$
$$= \frac{\text{स्प } ४५^\circ + \text{स्प } ३०^\circ}{१ - \text{स्प } ४५^\circ \text{ स्प } ३०^\circ}$$
$$= \frac{१ + \frac{१}{\sqrt{३}}}{१ - \frac{१}{\sqrt{३}}}$$
$$= \frac{\sqrt{३}+१}{\sqrt{३}-१} = \frac{(\sqrt{३}+१)^२}{३-१}$$
$$= २ + \sqrt{३}$$

उदाहरण २—सिद्ध करो कि

(अ) $\text{ज्या } (क+ख) \text{ ज्या } (क-ख) = \text{ज्या}^२ \, क - \text{ज्या}^२ \, ख$

(राजपूताना १९४०, उत्तर प्रदेश १९३४)

(आ) $\text{कोज्या } (क+ख) \text{ कोज्या } (क-ख)$
$= \text{कोज्या}^२ \, क - \text{ज्या}^२ \, ख$ (पंजाब १९४१)

(अ) $\text{ज्या } (क+ख) \text{ ज्या } (क-ख)$
$= (\text{ज्या } क \text{ कोज्या } ख + \text{ज्या } ख \text{ कोज्या } क)$
$(\text{ज्या } क \text{ कोज्या } ख - \text{ज्या } ख \text{ कोज्या } क)$

$= \text{ज्या}^२ \, क \text{ कोज्या}^२ \, ख - \text{ज्या}^२ \, ख \text{ कोज्या}^२ \, क$
$= \text{ज्या}^२ \, क \, (१ - \text{ज्या}^२ \, ख) - \text{ज्या}^२ \, ख \, (१ - \text{ज्या}^२ \, क)$

$$= \text{ज्या}^2\text{क} - \text{ज्या}^2\text{क}\ \text{ज्या}^2\text{ख} - \text{ज्या}^2\text{ख} + \text{ज्या}^2\text{ख}\ \text{ज्या}^2\text{क}$$

$$= \text{ज्या}^2\ \text{क} - \text{ज्या}^2\ \text{ख}$$

(आ) कोज्या (क + ख) कोज्या (क – ख)

$$(\text{कोज्या क कोज्या ख} - \text{ज्या क ज्या ख})\ (\text{कोज्या क कोज्या ख} + \text{ज्या क ज्या ख})$$

$$= \text{कोज्या}^2\ \text{क}\ \text{कोज्या}^2\ \text{ख} - \text{ज्या}^2\ \text{क}\ \text{ज्या}^2\ \text{ख}$$

$$= \text{कोज्या}^2\ \text{क}\ (१ - \text{ज्या}^2\ \text{ख}) - (१ - \text{कोज्या}^2\ \text{क})\ \text{ज्या}^2\ \text{ख}$$

$$= \text{कोज्या}^2\ \text{क} - \text{कोज्या}^2\ \text{क}\ \text{ज्या}^2\ \text{ख} - \text{ज्या}^2\ \text{ख} + \text{कोज्या}^2\ \text{क}\ \text{ज्या}^2\ \text{ख}$$

$$= \text{कोज्या}^2\ \text{क} - \text{ज्या}^2\ \text{ख}$$

उदाहरण ३—यदि

$$\text{क} + \text{ख} = \text{म}$$

$$\text{स्प क} = \text{च स्प ख}$$

सिद्ध करो

$$\text{ज्या (क} \sim \text{ख)} = \frac{१ - \text{च}}{१ + \text{च}}\ \text{ज्या म}$$

(उत्तर प्रदेश १९४२, १९४५, १९४८, पटना १९३८)

$$\frac{१}{\text{च}} = \frac{\text{स्प ख}}{\text{स्प क}}$$

$$\frac{१ - \text{च}}{१ + \text{च}} = \frac{\text{स्प ख} - \text{स्प क}}{\text{स्प ख} + \text{स्प क}}$$

$$= \frac{\text{ज्या ख कोज्या क} - \text{ज्या क कोज्या ख}}{\text{ज्या ख कोज्या क} + \text{ज्या क कोज्या ख}}$$

$$= \frac{\text{ज्या (ख} - \text{क)}}{\text{ज्या (क} + \text{ख)}} = \frac{\text{ज्या (क} \sim \text{ख)}}{\text{ज्या म}}$$

$$\text{ज्या (क} \sim \text{ख)} = \text{ज्या म}.\ \frac{१ - \text{च}}{१ + \text{च}}$$

उदाहरण ४. यदि

$$स्प\ ख = \frac{न\ कोज्या\ क\ ज्या\ क}{१ - न\ ज्या^२\ क},$$

सिद्ध करो कि

स्प (क − ख) = (१ − न) स्प क (पटना १९४१)

$$स्प\ ख = न\frac{ज्या\ क\ \ कोज्या\ क}{१ - ज्या^२\ क}$$

(अंश और हर दोनों में कोज्या^{२} क से भाग देकर)

$$= \frac{न\ स्प\ क}{व्युको^२\ क - न\ स्प^२\ क}$$

∴ स्प ख (१ + स्प^२ क) − न स्प ख स्प^२ क = न स्प क

स्प ख + (१ − न) स्प ख स्प^२ क = न स्प क

स्प क − स्प ख

= (१ − न) स्प क. (१ + स्प क स्प ख)

$$\frac{स्प\ क - स्प\ ख}{१ + स्प\ क\ स्प\ ख} = (१-न)\ स्प\ क$$

∴ स्प (क−ख) = (१−न) स्प क

अभ्यास ९

यदि कोज्या क = $\frac{४}{५}$, ज्या ख = $\frac{५}{१३}$ हो, तो सिद्ध करो कि

(१) कोज्या (क + ख) = $\frac{३३}{६५}$

(२) ज्या (क − ख) = $\frac{१६}{६५}$

(३) यदि व्युज्ज्या क = $\frac{१७}{१५}$ और ज्या ख = $\frac{५}{१३}$ हो तो सिद्ध करो कि

स्प (क + ख) = १०$\frac{१०}{२१}$

निम्नलिखित के मान बताओ

(४) ज्या ४०° कोज्या २०° + कोज्या ४०° ज्या २०°

(५) कोज्या २५° कोज्या २०° − ज्या २५° ज्या २०°

(६) $\frac{\text{स्प } ५५^\circ - \text{स्प } १०^\circ}{१ + \text{स्प } ५५^\circ \text{ स्प } १०^\circ}$

(७) स्प १५°, ज्या १५° (उत्तर प्रदेश १६४६)

(८) ज्या क कोज्या (क–ख)––कोज्या क ज्या (क–ख)

सिद्ध करो कि

(६) कोज्या (क + ख) कोज्या (क–ख)–ज्या (क + ख) ज्या (क–ख) = कोज्या २ क

(१०) $\frac{\text{ज्या } २ \text{ म कोज्या म} - \text{कोज्या } २ \text{ म ज्या म}}{\text{कोज्या } २ \text{ म कोज्या म} + \text{ज्या } २ \text{ म ज्या म}} = \text{स्प म}$

(११) ज्या २०°२८' कोज्या ६°३२' + कोज्या २०°२८' कोज्या ६°३२' = $\frac{१}{२}$

(१२) कोज्या (३०° – क) – कोज्या (३०° + क) = ज्या क

(१३) $\frac{\text{ज्या (क} - \text{ख)}}{\text{कोज्या क कोज्या ख}} + \frac{\text{ज्या (ख} - \text{ग)}}{\text{कोज्या ख कोज्या ग}} + \frac{\text{ज्या (ग} - \text{क)}}{\text{कोज्या ग कोज्या क}} = ०$

(१४) $\frac{\text{ज्या (क} - \text{ख)}}{\text{ज्या क ज्या ख}} + \frac{\text{ज्या (ख} - \text{ग)}}{\text{ज्या ख ज्या ग}} + \frac{\text{ज्या (ग} - \text{क)}}{\text{ज्या ग ज्या क}} = ०$

(उत्तर प्रदेश १६३६)

(१५) $\text{स्प क} \pm \text{स्प ख} = \frac{\text{ज्या (क} \pm \text{ख)}}{\text{कोज्या क कोज्या ख}}$

(१६) $\text{कोस्प क} \pm \text{कोस्प ख} = \frac{\text{ज्या (क} \pm \text{ख)}}{\text{ज्या क ज्या ख}}$

(१७) $(\text{ज्या क} + \text{कोज्या ख})^२ + (\text{ज्या ख} + \text{कोज्या क})^२ = २ + २ \text{ ज्या (क} + \text{ख)}$

(१८) यदि

स्प क = च, स्प ख = छ

तो सिद्ध करो कि

$$\text{व्युज्या } (\text{क} + \text{ख}) = \frac{\sqrt{(१ + \text{च}^२)(१ + \text{छ}^२)}}{\text{च} + \text{छ}}$$

सिद्ध करो

(१९) $$\text{स्प}^२ \text{ क} - \text{स्प}^२ \text{ ख} = \frac{\text{ज्या}^२ \text{ क} - \text{ज्या}^२ \text{ ख}}{\text{कोज्या}^२ \text{ क कोज्या}^२ \text{ ख}}$$

(कलकत्ता १९३६)

(२०) स्प ३५° + स्प १०° + स्प ३५° स्प १०° = १

(२१) ज्या² ७५° − ज्या² १५° = ज्या ६०°

(२२) ज्या² (क + ४५°) + ज्या² (क − ४५°) = १

(२३) यदि $\text{स्प क} = \frac{\sqrt{३}}{४ - \sqrt{३}}$, $\text{कोस्प ख} = \frac{४ + \sqrt{३}}{\sqrt{३}}$

सिद्ध करो

स्प (क − ख) = .३७५

(२४) यदि स्प क = $\frac{३}{४}$, स्प ख = $\frac{१}{७}$ हो तो

सिद्ध करो कि

$$\text{क} + \text{ख} = \frac{\pi}{४}$$

सिद्ध करो

(२५) $$\text{कोस्प}\left(\frac{\pi}{४} + \text{थ}\right) \text{कोस्प}\left(\frac{\pi}{४} - \text{थ}\right) = १$$

(२६) $$\text{कोस्प}\left(\frac{\pi}{४} + \text{थ}\right) = \frac{\text{कोज्या थ} - \text{ज्या थ}}{\text{कोज्या थ} + \text{ज्या थ}}$$

(२७) ज्या (न + १) क ज्या (न+२) क
+ कोज्या (न + १) क कोज्या (न + २) क = कोज्या क

(२८) $$\text{कोज्या (क+ख)} = \frac{\text{१ − स्प क स्प ख}}{\text{व्युको क व्युको ख}}$$

$$= \frac{\text{व्युज्या क व्युज्या ख − व्युको क व्युको ख}}{\text{व्युको क व्युको ख व्युज्या क व्युज्या ख}}$$

(पंजाब १९३६)

(२९) यदि

क + ख = ४५° हो

तो सिद्ध करो कि

(१ + स्प क) (१ + स्प ख) = २

(३०) सिद्ध करो कि

कोज्या ५५° + कोज्या ६५° + कोज्या १७५° = ०

(राजपूताना १९३९)

(३१) $$\text{(कोज्या थ + ज्या थ)} = \sqrt{२}\ \text{कोज्या} \left(\text{थ} - \frac{\pi}{४} \right)$$

(राजपूताना १९४७)

(३२) $$\frac{\text{१ − स्प (१ + न) क स्प (न − १) क}}{\text{१ + स्प (१ + न) क स्प (न − १) क}} = \frac{\text{कोज्या (२ न क)}}{\text{कोज्या २ क}}$$

(३३) $$\frac{\text{१ − स्प क स्प ख}}{\text{१ + स्प क स्प ख}} = \frac{\text{कोज्या (क + ख)}}{\text{कोज्या (क − ख)}}$$

(३४) यदि

कोस्प क कोस्प ख = २

सिद्ध करो

कोज्या (क − ख) = ३ कोज्या (क + ख)

(३५) यदि

च कोज्या (य+क) = छ कोज्या (य − क)

सिद्ध करो

$$स्प\ य = \frac{च - छ}{च + छ} कोस्प\ क$$

(३६) यदि ज्या (य + क) = कोज्या (य + क),

सिद्ध करो

$$स्प\ य = \frac{१ - स्प\ क}{१ + स्प\ क}$$

(३७) यदि

$$स्प\left(\frac{\pi}{४} - क\right) = च\ कोस्प\left(\frac{\pi}{४} - ख\right) तो$$

सिद्ध करो कि

$$\frac{ज्या\ (क + ख)}{कोज्या\ (क - ख)} = \frac{१ - च}{१ + च}$$

यदि क, ख, ग किसी त्रिभुज के कोण हों तो सिद्ध करो कि

(३८) कोज्या क + कोज्या (ख−ग) = २ ज्या ख ज्या ग

(३९) $ज्या\ \frac{क}{२} + कोज्या\ \frac{ख - ग}{२} = २\ कोज्या\ \frac{ख}{२}\ कोज्या\ \frac{ग}{२}$

(४०) $ज्या\ \frac{१}{२}\ (क + ख - ग)\ कोज्या\ (क + ख)$

$- कोज्या\ \frac{१}{२}\ (क + ख - ग)\ ज्या\ (क + ख)$

$= - १$

(४१) $स्प\ \frac{क}{२} + स्प\ \frac{ख + ग}{२} = व्युको\ \frac{क}{२}\ व्युको\ \frac{ख + ग}{२}$

यदि क + ख = म तो दिखाओ कि

(४२) $ज्या^२\ क + ज्या^२ ख - २\ ज्या\ क\ ज्या\ ख\ ज्या\ म$

$= कोज्या^२\ म$

(४३) $कोज्या^२\ क + कोज्या^२\ ख - २\ कोज्या\ क\ कोज्या\ ख\ कोज्या\ ग$

$= ज्या^२\ म$ (पटना १९३६)

अपवर्त्य कोण (Multiple Angles)

(६०) सिद्ध करो कि

(१) ज्या २ क = २ ज्या क कोज्या क
($\sin 2A = 2 \sin A \cos A$)

(२) कोज्या २ क = कोज्या^{2}क − ज्या^{2}क = १ − २ ज्या^{2}क
= २ कोज्या^{2} क − १

($\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 1 - 2 \sin^2 A$
$= 2 \cos^2 A - 1$)

(३) स्प २ क = $\dfrac{\text{२ स्प क}}{\text{१} - \text{स्प}^2\text{क}}$

$$\left(\tan 2A = \frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A}\right)$$

(१) ज्या २ क = ज्या (क + क)
= ज्या क कोज्या क + ज्या क कोज्या क
= २ ज्या क कोज्या क

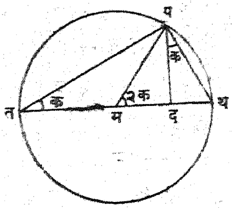
(२) कोज्या २क = कोज्या (क + क)
= कोज्या क कोज्या क − ज्या क ज्या क
= कोज्या^{2} क − ज्या^{2} क
= (१ − ज्या^{2} क) − ज्या^{2} क
= १ − २ ज्या^{2} क

तथा = कोज्या^{2} क − (१ − कोज्या^{2} क)
= २ कोज्या^{2} क − १

स्प २ क = स्प (क + क)

$$= \frac{\text{स्प क} + \text{स्प क}}{\text{१} - \text{स्प क स्प क}} = \frac{\text{२ स्प क}}{\text{१} - \text{स्प}^2\text{ क}}$$

(६१) भूमितीय प्रमाण (Geometrical Proof)



मान लो कोण प म थ = २ क है। म को केन्द्र मान कर म प के बराबर त्रिज्या (radius) लेकर एक वृत्त (circle) खींचो जो कि थ म को बढ़ाने पर त विन्दु पर काटे। त प और थ प को मिलाओ।

विन्दु प से त थ पर प द लम्ब डालो।

$$\angle \text{थ त प} = \tfrac{1}{2}\angle \text{थ म प} = \text{क}$$

$$\angle \text{थ प द} = \angle \text{थ त प} = \text{क}$$

$$\text{अतः ज्या २ क} = \frac{\text{प द}}{\text{म प}} = \frac{\text{२ प द}}{\text{२ म प}} = \frac{\text{२ प द}}{\text{त थ}}$$

$$= \frac{\text{२ प द}}{\text{त प}} \cdot \frac{\text{त प}}{\text{त थ}}$$

$$= \text{२ ज्या क कोज्या क}$$

$$\text{कोज्या २ क} = \frac{\text{म द}}{\text{म प}} = \frac{\text{२ म द}}{\text{त थ}}$$

$$= \frac{(\text{म द} + \text{त म}) - (\text{त म} - \text{म द})}{\text{त थ}}$$

$$= \frac{\text{त द} - \text{द थ}}{\text{त थ}}$$

$$= \frac{\text{त द}}{\text{त प}} \cdot \frac{\text{त प}}{\text{त थ}} - \frac{\text{द थ. प थ}}{\text{प थ. त थ}}$$

$= \text{कोज्या}^2 \text{ क} - \text{ज्या}^2 \text{ क}$

$$\text{स्प } 2 \text{ क} = \frac{\text{प द}}{\text{म द}} = \frac{2 \text{ प द}}{\text{त द} - \text{द थ}}$$

$$= \frac{\frac{2 \text{ प द}}{\text{त द}}}{1 - \frac{\text{द थ}}{\text{त द}}} = \frac{\frac{2 \text{ प द}}{\text{त द}}}{1 - \frac{\text{द थ}}{\text{त प}} \cdot \frac{\text{प द}}{\text{त द}}}$$

$$= \frac{2 \text{ स्प क}}{1 - \text{स्प}^2 \text{ क}}$$

(६२) सिद्ध करो कि

(१) $\text{ज्या } 3 \text{ क} = 3 \text{ ज्या क} - 4 \text{ ज्या}^3 \text{ क}$

$\sin 3A = 3 \sin A - 4 \sin^3 A$

(२) $\text{कोज्या } 3 \text{ क} = 4 \text{ कोज्या}^3 \text{ क} - 3 \text{ कोज्या क}$

$\cos 3A = 4 \cos^3 A - 3 \cos A$

(३) $$\text{स्प } 3 \text{ क} = \frac{3 \text{ स्प क} - \text{स्प}^3 \text{ क}}{1 - 3 \text{ स्प}^2 \text{ क}}$$

$$\tan 3A = \frac{3 \tan A - \tan^3 A}{1 - 3 \tan^2 A}$$

(१) $\text{ज्या } 3 \text{ क} = \text{ज्या } (\text{क} + 2 \text{ क})$

$= \text{ज्या क कोज्या } 2 \text{ क} + \text{कोज्या क ज्या } 2 \text{ क}$

$= \text{ज्या क } (1 - 2 \text{ ज्या}^2 \text{ क}) + \text{कोज्या क} (2 \text{ ज्या क कोज्या क})$

$= \text{ज्या क } (1 - 2 \text{ ज्या}^2 \text{ क}) + 2 \text{ ज्या क } (1 - \text{ज्या}^2 \text{ क})$

$= 3 \text{ ज्या क} - 4 \text{ ज्या}^3 \text{ क}$

$\sin 3A = 3 \sin A - 4 \sin^3 A$

(२) $\text{कोज्या } 3 \text{ क} = \text{कोज्या } (\text{क} + 2 \text{ क})$

$= \text{कोज्या क कोज्या } 2 \text{ क} - \text{ज्या क ज्या } 2 \text{ क}$

$= $ कोज्या क (२ कोज्या^{2} क $-$ १) $-$ ज्या क २ ज्या क कोज्या क

$= $ कोज्या क (२ कोज्या^{2} क $-$ १) $-$ २ कोज्या क (१ $-$ कोज्या^{2} क)

$= $ ४ कोज्या^{3} क $-$ ३ कोज्या क

$$\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$$

(३) स्प ३ क $=$ स्प (क $+$ २ क)

$$= \frac{\text{स्प क} + \text{स्प २ क}}{\text{१} - \text{स्प क स्प २ क}}$$

$$= \frac{\text{स्प क} + \dfrac{\text{२ स्प क}}{\text{१} - \text{स्प}^2\text{ क}}}{\text{१} - \text{स्प क}\dfrac{\text{२ स्प क}}{\text{१} - \text{स्प}^2\text{ क}}}$$

$$= \frac{\text{स्प क (१} - \text{स्प}^2\text{ क)} + \text{२ स्प क}}{\text{(१} - \text{स्प}^2\text{ क)} - \text{२ स्प}^2\text{ क}}$$

$$= \frac{\text{३ स्प क} - \text{स्प}^3\text{ क}}{\text{१} - \text{३ स्प}^2\text{ क}}$$

$$\tan 3A = \frac{3\tan A - \tan^3 A}{1 - 3\tan^2 A}$$

(६३) उदाहरण १:—सिद्ध करो कि

(१) स्प क $= \dfrac{\text{ज्या २ क}}{\text{१} + \text{कोज्या २ क}}$

(२) कोज्या २ क $= \dfrac{\text{१} - \text{स्प}^2\text{ क}}{\text{१} + \text{स्प}^2\text{ क}}$ (उत्तर प्रदेश १६४६)

(१) स्प क $= \dfrac{\text{ज्या क}}{\text{कोज्या क}} = \dfrac{\text{२ ज्या क कोज्या क}}{\text{२ कोज्या}^2\text{ क}}$

$$= \frac{\text{ज्या २ क}}{\text{१} + \text{कोज्या २ क}}$$

(२) कोज्या २ क = कोज्या^{२} क − ज्या^{२} क

$$= \frac{\text{कोज्या}^{२}\ \text{क} - \text{ज्या}^{२}\ \text{क}}{\text{कोज्या}^{२}\ \text{क} + \text{ज्या}^{२}\ \text{क}}$$

(अंश और हर दोनों में कोज्या^{२} क का भाग देकर)

$$= \frac{१ - \text{स्प}^{२}\ \text{क}}{१ + \text{स्प}^{२}\ \text{क}}$$

उदाहरण २—यदि २ स्प क = ३ स्प ख,

सिद्ध करो कि

$$\text{स्प}\ (\text{क} - \text{ख}) = \frac{\text{ज्या}\ २\ \text{ख}}{५ - \text{कोज्या}\ २\ \text{ख}}$$

(राजपूताना १६४४, उत्तर प्रदेश १६२७, १६४०, १६४६)

$$\text{स्प}\ (\text{क} - \text{ख}) = \frac{\text{स्प क} - \text{स्प ख}}{१ + \text{स्प क स्प ख}}$$

किन्तु २ स्प क = ३ स्प ख

$$\text{स्प क} = \tfrac{३}{२}\ \text{स्प ख}$$

$$\therefore \text{स्प}\ (\text{क} - \text{ख}) = \frac{\tfrac{३}{२}\ \text{स्प ख} - \text{स्प ख}}{१ + \tfrac{३}{२}\ \text{स्प ख स्प ख}}$$

$$= \frac{\text{स्प ख}}{२ + ३\ \text{स्प}^{२}\text{ख}}$$

$$= \frac{\text{ज्या ख कोज्या ख}}{२\ \text{कोज्या}^{२}\text{ख} + ३\ \text{ज्या}^{२}\ \text{ख}}$$

$$= \frac{\text{ज्या}\ २\ \text{ख}}{५\ (\text{कोज्या}^{२}\ \text{ख} + \text{ज्या}^{२}\ \text{ख}) - (\text{कोज्या}^{२}\ \text{ख} - \text{ज्या}^{२}\ \text{ख})}$$

$$= \frac{\text{ज्या}\ २\ \text{ख}}{५ - \text{कोज्या}\ २\ \text{ख}}$$

उदाहरण ३—सिद्ध करो कि

$$\frac{\text{कोज्या}\ ६^{\circ} + \text{ज्या}\ ६^{\circ}}{\text{कोज्या}\ ६^{\circ} - \text{ज्या}\ ६^{\circ}} = \text{स्प}\ ५१^{\circ}$$ (उत्तर प्रदेश १६३७)

$$\text{वाम पक्ष} = \frac{(\text{कोज्या } ९^\circ + \text{ज्या } ९^\circ)^२}{\text{कोज्या}^२\ ९^\circ - \text{ज्या}^२\ ९^\circ}$$

$$= \frac{\text{कोज्या}^२\ ९^\circ + \text{ज्या}^२\ ९^\circ + २ \text{ ज्या } ९^\circ \text{ कोज्या } ९^\circ}{\text{कोज्या}^२\ ९^\circ - \text{ज्या}^२\ ९^\circ}$$

$$= \frac{१ + \text{ज्या } १८^\circ}{\text{कोज्या } १८^\circ}$$

$$= \frac{१ + \text{कोज्या } ७२^\circ}{\text{ज्या } ७२^\circ}$$

$$= \frac{२ \text{ कोज्या}^२\ ३६^\circ}{२ \text{ ज्या } ३६^\circ \text{ कोज्या } ३६^\circ}$$

$$= \text{कोस्प } ३६^\circ = \text{स्प } ५४^\circ$$

अभ्यास १०

(१) यदि कोज्या $३०^\circ = \frac{\sqrt{३}}{२}$ तो सिद्ध करो कि

$$\text{कोज्या } १५^\circ = \frac{\sqrt{२+\sqrt{३}}}{२}$$

(२) यदि ज्या क $= \frac{३}{५}$, तो स्प २ क का मान बताओ।

(३) यदि स्प क $= \frac{१}{२}$, स्प ख $= \frac{१}{३}$ तो स्प (२ क+ख) का मान बताओ।

(राजपूताना १९४४)

(४) यदि स्प म $= \frac{\text{छ}}{\text{च}}$, सिद्ध करो कि

च कोज्या २ म + छ ज्या २ म = च (दिल्ली १९३९)

(५) यदि कोज्या २ क $= \frac{१३}{३६}$, तो सिद्ध करो कि

$$\text{कोज्या क} = \frac{७}{६\sqrt{२}}$$

(६) यदि स्प क $= \frac{१}{७}$, स्प ख $= \frac{१}{३}$ हो तो सिद्ध करो कि
कोज्या २ क = ज्या ४ ख (राजपूताना १९४३)

सिद्ध करो कि

(७) कोस्प क − कोस्प २ क $= \frac{१}{२}$ (स्प क + कोस्प क)
= व्युज्या २ क (कलकत्ता १८७०)

(८) १ + स्प क स्प २ क = व्युको २ क

(९) कोस्प क − स्प क = २ कोस्प २ क (राजपूताना १९४५)

(१०) ज्या २ क $= \dfrac{\text{२ स्प क}}{\text{१} + \text{स्प}^{२}\text{ क}}$

(११) स्प क $= \dfrac{\text{१ − कोज्या २ क}}{\text{ज्या २ क}}$

(१२) (ज्या क + कोज्या क)^{२} = १ + ज्या २ क

(१३) कोस्प क − स्प क
= २ कोज्या २ क व्युज्या २ क

(१४) कोज्या^{४} म − ज्या^{४} म = कोज्या २ म

(१५) स्प $\left(\frac{\pi}{४} + \text{थ}\right)$ − स्प $\left(\frac{\pi}{४} - \text{थ}\right)$ = २ स्प २ थ
(उत्तर प्रदेश १९४७)

(१६) $\dfrac{\text{स्प}\left(\frac{\pi}{४} + \text{थ}\right) - \text{स्प}\left(\frac{\pi}{४} - \text{थ}\right)}{\text{स्प}\left(\frac{\pi}{४} + \text{थ}\right) + \text{स्प}\left(\frac{\pi}{४} - \text{थ}\right)}$ = ज्या २ थ

(१७) $\dfrac{\text{१ − कोज्या २ क}}{\text{१ + कोज्या २ क}}$ = स्प^{२} क

(१८) कोस्प क कोस्प २ क − कोस्प २ क कोस्प ३ क
− कोस्प ३ क कोस्प क = १

(राजपूताना १९३९)

(१९) $\text{ज्या क ज्या (ख} - \text{ग)} + \text{ज्या ख ज्या (ग} - \text{क)}$

$+ \text{ज्या ग ज्या (क} - \text{ख)} = ०$

(२०) $\text{ज्या}^2 \left(\frac{\pi}{८} + \frac{\text{क}}{२} \right) - \text{ज्या}^2 \left(\frac{\pi}{८} - \frac{\text{क}}{२} \right) = \frac{१}{\sqrt{२}} \text{ ज्या क}$

(२१) $\text{स्प २ म} - \text{२ स्प म} = \text{स्प}^2 \text{ म स्प २ म}$

(२२) $\frac{\text{ज्या क} + \text{कोज्या क}}{\text{ज्या क} - \text{कोज्या क}} = \sqrt{\frac{१ + \text{ज्या २ क}}{- \text{ज्या २ क}}}$

(२३) $\text{स्प} \left(४५^\circ + \frac{\text{थ}}{२} \right) = \sqrt{\frac{१ + \text{ज्या थ}}{१ - \text{ज्या थ}}}$

(राजपूताना १९३८, १९४१)

(२४) $\text{कोज्या} \left(\frac{\pi}{४} - \text{थ} \right) \text{कोज्या} \left(\frac{\pi}{४} + \text{थ} \right) = \frac{१}{२} \text{ कोज्या २ थ}$

(पंजाब १९४१)

(२५) $\frac{\text{ज्या ८ क}}{\text{ज्या क}} = \text{८ कोज्या क कोज्या २ क कोज्या ४ क}$

(२६) $\frac{\text{ज्या क} + \text{ज्या २ क}}{१ + \text{कोज्या क} + \text{कोज्या २ क}} = \text{स्प क}$

(२७) $\text{कोज्या}^2 (\text{क} + १५^\circ) + \text{कोज्या}^2 (\text{क} - १५^\circ)$

$= १ + \frac{\sqrt{३}}{२} \text{ कोज्या २ क}$

(२८) $\frac{१ + \text{ज्या क} - \text{कोज्या क}}{१ + \text{ज्या क} + \text{कोज्या क}} = \text{स्प } \frac{\text{क}}{२}$ (कलकत्ता १९३९)

(२९) $\frac{\text{व्युज्या २ क}}{१ + \text{व्युज्या २ क}} = \frac{१ + \text{स्प}^2 \text{क}}{(१ + \text{स्प क})^2}$

(३०) $\frac{१ - \text{स्प}^2 (४५^\circ - \text{क})}{१ + \text{स्प}^2 (४५^\circ - \text{क})} = \text{ज्या २ क}$

(३१) $\dfrac{२ \text{ स्प } \left(\dfrac{\pi}{४}+\dfrac{क}{२}\right)}{१+\text{स्प}^{२}\left(\dfrac{\pi}{४}+\dfrac{क}{२}\right)}+\dfrac{१-\text{स्प}^{२}\left(\dfrac{\pi}{४}-\dfrac{क}{२}\right)}{१+\text{स्प}^{२}\left(\dfrac{\pi}{४}-\dfrac{क}{२}\right)}$

$-$ कोज्या क $+$ ज्या क

(उत्तर प्रदेश १६२६)

(३२) व्युज्या क $+$ २ व्युज्या २ क $=$ व्युको क कोस्प $\dfrac{क}{२}$

(पंजाब १६४२)

(३३) $\dfrac{\text{कोज्या } ८^{\circ}+\text{ज्या } ८^{\circ}}{\text{कोज्या } ८^{\circ}-\text{ज्या } ८^{\circ}}=\text{स्प } ५३^{\circ}$

(३४) कोस्प $(क+१५^{\circ})=$ स्प $(क-१५^{\circ})=\dfrac{४ \text{ कोज्या } २ क}{१+२ \text{ ज्या } २ क}$

(३५) ज्या ४ थ $=$ ४ ज्या थ कोज्या^{३} थ $-$ ४ ज्या^{२} थ कोज्या थ

(३६) कोज्या ५ थ $=$ १६ कोज्या^{५} थ $-$ २० कोज्या^{३} थ $+$ ५ कोज्या थ

(३७) स्प $\left(क+\dfrac{\pi}{६}\right)+$ कोस्प $\left(क-\dfrac{\pi}{६}\right)$

$=\dfrac{१}{\text{ज्या } २ क-\text{ज्या } ६०^{\circ}}$ (दिल्ली १६३१)

(३८) [ज्या थ (१ $+$ ज्या थ) $+$ कोज्या थ (१ $+$ कोज्या थ)] $\times$
[ज्या थ (१ $-$ ज्या थ) $+$ कोज्या थ (१ $-$ कोज्या थ)] $=$ ज्या २ थ

(पंजाब १६३६)

(३६) स्प ३ क स्प २ क स्प क $=$ स्प ३ क $-$ स्प २ क $-$ स्प क

(४०) यदि कोज्या क $=\dfrac{४०}{४१}$ और कोज्या ख $\dfrac{६०}{६१}$ हो तो सिद्ध करो कि ज्या^{२} $\dfrac{क-ख}{१}=\dfrac{१}{२५०१}$ जबकि क और ख न्यूनकोण हैं।

(राजपूताना १६४०)

(४१) यदि कोज्या (क − ख) = कोज्या थ कोज्या (क + ख),
सिद्ध करो कि

कोस्प क कोस्प ख + कोस्प² $\frac{१}{२}$ थ = ० (राजपूताना १९४१)

(४२) यदि २ स्प ख + कोस्प ख = स्प क
सिद्ध करो कि

कोस्प ख = २ स्प (क − ख) (उत्तर प्रदेश १९३५, राजपूताना १९४६)

(४३) यदि

$$\text{स्प थ} = \frac{\text{क ज्या य + ख ज्या र}}{\text{क कोज्या य + ख कोज्या र}}$$

सिद्ध करो कि

क ज्या (थ − य) + ख ज्या (थ − र) = ०

(४४) यदि

$$\text{ज्या क} = \frac{\text{च − छ}}{\text{च + छ}}$$

सिद्ध करो कि

$$\text{स्प}\left(४५^\circ - \frac{\text{क}}{२}\right) = \left(\frac{\text{छ}}{\text{च}}\right)^{\frac{१}{२}}$$ (राजपूताना १९४२)

अध्याय ७

योग एवं गुणनफलों का पारस्परिक परिवर्त्तन

(Transformation of Product and Sums)

(६४) सिद्ध करो कि

$$\text{ज्या } ग + \text{ज्या } घ = २ \text{ ज्या } \frac{ग+घ}{२} \text{ कोज्या } \frac{ग-घ}{२}$$

$$\sin C + \sin D = 2 \sin \frac{C+D}{2} \cos \frac{C-D}{2}$$

$$\text{ज्या } ग - \text{ज्या } घ = २ \text{ कोज्या } \frac{ग+घ}{२} \text{ ज्या } \frac{ग-घ}{२}$$

$$\sin C - \sin D = 2 \cos \frac{C+D}{2} \sin \frac{C-D}{2}$$

$$\text{कोज्या } ग + \text{कोज्या } घ = २ \text{ कोज्या } \frac{ग+घ}{२} \text{ कोज्या } \frac{ग-घ}{२}$$

$$\cos C + \cos D = 2 \cos \frac{C+D}{2} \cos \frac{C-D}{2}$$

$$\text{कोज्या } ग - \text{कोज्या } घ = २ \text{ ज्या } \frac{ग+घ}{२} \text{ ज्या } \frac{घ-ग}{२}$$

$$\cos C - \cos D = 2 \sin \frac{C+D}{2} \sin \frac{D-C}{2}$$

अध्याय ६ में यह सिद्ध हो चुका है कि

$$\text{ज्या } क \text{ कोज्या } ख + \text{कोज्या } क \text{ ज्या } ख = \text{ज्या } (क + ख)$$

ज्या क कोज्या ख − कोज्या क ज्या ख = ज्या (क − ख)

इन्हें जोड़ और घटाकर

२ ज्या क कोज्या ख = ज्या (क + ख) + ज्या (क − ख) (१)

२ कोज्या क ज्या ख = ज्या (क + ख) − ज्या (क − ख) (२)

अध्याय ६ में यह भी सिद्ध हो चुका है कि

कोज्या क कोज्या ख − ज्या क ज्या ख = कोज्या (क + ख)

कोज्या क कोज्या ख + ज्या क ज्या ख = कोज्या (क − ख)

इन्हें जोड़ और घटाकर

२ कोज्या क कोज्या ख = कोज्या (क + ख) + कोज्या (क − ख) (३)

२ ज्या क ज्या ख = कोज्या (क − ख) − कोज्या (क + ख) (४)

अब यदि क + ख = ग

एवं क − ख = घ हो तो

$$\text{क} = \frac{\text{ग} + \text{घ}}{२} \text{ और ख} = \frac{\text{ग} - \text{घ}}{२}$$

अतः ऊपर के सूत्रों में क और ख का मान रखने के बाद वे फल निकलते हैं

$$\text{ज्या ग} + \text{ज्या घ} = \frac{\text{ग} + \text{घ}}{२} \text{ कोज्या} \frac{\text{ग} - \text{घ}}{२} \quad \text{——(५)}$$

$$\text{ज्या ग} - \text{ज्या घ} = २ \text{ कोज्या} \frac{\text{ग} + \text{घ}}{२} \text{ ज्या} \frac{\text{ग} - \text{घ}}{२} \quad \text{——(६)}$$

$$\text{कोज्या ग} + \text{कोज्या घ} = २ \text{ कोज्या} \frac{\text{ग} + \text{घ}}{२} \text{ कोज्या} \frac{\text{ग} - \text{घ}}{२} \quad \text{—(७)}$$

$$\text{कोज्या ग} - \text{कोज्या घ} = २ \text{ ज्या} \frac{\text{ग} + \text{घ}}{२} \text{ ज्या} \frac{\text{घ} - \text{ग}}{२} \quad \text{—(८)}$$

टिप्पणी− ध्यान रहे कि ८ वें सूत्र में ज्या $\frac{\text{घ} - \text{ग}}{२}$ है न कि

ज्या $\frac{ग - घ}{२}$ इन परिणामों को सिद्ध करने की विधि को दो ज्या या दो कोज्या के **संयोग की विधि** कहते हैं।

(६५) उदाहरण १—सरल करो

$$\frac{ज्या\ क + ज्या\ २\ क}{कोज्या\ क - कोज्या\ २\ क}$$

$$= \frac{२\ ज्या \frac{क + २क}{२}\ कोज्या \frac{क - २क}{२}}{२\ ज्या \frac{क + २\ क}{२}\ ज्या \frac{२\ क - क}{२}}$$

$$= \frac{कोज्या \left(- \frac{क}{२} \right)}{ज्या \frac{क}{२}}$$

$$= \frac{कोज्या \frac{क}{२}}{ज्या\ \frac{क}{२}} = कोस्प \frac{क}{२}$$

उदाहरण २—सिद्ध करो कि

$$ज्या\ ५०° - ज्या\ ७०° + ज्या\ १०° = ०$$

$$ज्या\ ५०° - ज्या\ ७०° + ज्या\ १०°$$

$$= २\ कोज्या \frac{५०° + ७०°}{२}\ ज्या \frac{५०° - ७०°}{२} + ज्या\ १०°$$

$$= २\ कोज्या\ ६०°\ ज्या\ (- १०°) + ज्या\ १०°$$

$$= ज्या\ १०° (१ - २\ कोज्या\ ६०°)$$

$$= ज्या\ १०° (१ - १)$$

$$= ०$$

उदाहरण ३—यदि

ज्या क + ज्या ख = च

कोज्या क + कोज्या ख = छ

तो सिद्ध करो कि

$$\text{स्प}\ \frac{\text{क} - \text{ख}}{२} = -\sqrt{\frac{४ - \text{च}^२ - \text{छ}^२}{\text{च}^२ + \text{छ}^२}}$$ (राजपूताना १९४३)

ज्या क + ज्या ख = च (१)

कोज्या क + कोज्या ख = छ...(२)

(१) और (२) के वर्ग को जोड़ कर

$२ + २$ कोज्या क कोज्या ख + २ ज्या क ज्या ख = $\text{च}^२ + \text{छ}^२$

$२ + २$ कोज्या (क − ख) = $\text{च}^२ + \text{छ}^२$

$$२\ \text{कोज्या}^२ \frac{\text{क} - \text{ख}}{१} = \frac{१}{२}(\text{च}^२ + \text{छ}^२)$$

$$\text{कोज्या}\ \frac{\text{क} - \text{ख}}{२} = \frac{१}{२}(\text{च}^२ + \text{छ}^२)^{\frac{१}{२}}$$

$$\text{अतः ज्या}\ \frac{\text{क} - \text{ख}}{२} = \frac{१}{२}[४ - (\text{च}^२ + \text{छ}^२)]^{\frac{१}{२}}$$

$$\therefore \text{स्प}\ \frac{\text{क} - \text{ख}}{२} = +\frac{\sqrt{४ - (\text{च}^२ + \text{छ}^२)}}{\sqrt{\text{च}^२ + \text{छ}^२}}$$

$$= \sqrt{\frac{४ - (\text{च}^२ + \text{छ}^२)}{\text{च}^२ + \text{छ}^२}}$$

उदाहरण ४—यदि

ज्या क = च ज्या (क + २ ख)

सिद्ध करो कि

$$\text{स्प}\ (\text{क} + \text{ख}) = \frac{१ + \text{च}}{१ - \text{च}}\ \text{स्प ख}।$$

$$\frac{\text{ज्या}\,(\text{क}+२\,\text{ख})}{\text{ज्या क}}=\frac{१}{\text{च}}$$

(दोनों ओर १ जोड़ कर)

$$\frac{\text{ज्या}\,(\text{क}+२\,\text{ख})+\text{ज्या क}}{\text{ज्या क}}=\frac{१+\text{च}}{\text{च}} \quad \ldots\ldots(१)$$

(दोनों ओर १ घटाकर)

$$\frac{\text{ज्या}\,(\text{क}+२\,\text{ख})-\text{ज्या क}}{\text{ज्या क}}=\frac{१-\text{च}}{\text{च}} \quad \ldots\ldots(२)$$

(१) में (२) का भाग देकर

$$\frac{\text{ज्या}\,(\text{क}+२\,\text{ख})+\text{ज्या क}}{\text{ज्या}\,(\text{क}+२\,\text{ख})-\text{ज्या क}}=\frac{१+\text{च}}{१-\text{च}}$$

$$\frac{२\,\text{ज्या}\,(\text{क}+\text{ख})\,\text{कोज्या ख}}{२\,\text{ज्या ख कोज्या}\,(\text{क}+\text{ख})}=\frac{१+\text{च}}{१-\text{च}}$$

$$\therefore \text{स्प}\,(\text{क}+\text{ख})=\frac{१+\text{च}}{१-\text{च}}\,\text{स्प ख}$$

अभ्यास ११

सिद्ध करो

(१) $\frac{\text{कोज्या ७ क}-\text{कोज्या ९ क}}{\text{ज्या ९ क}-\text{ज्या ७ क}}=\text{स्प ८ क}$

(उत्तर प्रदेश १९३५)

(२) $\frac{\text{ज्या क}+\text{ज्या ख}}{\text{ज्या क}-\text{ज्या ख}}=\text{स्प}\,\frac{\text{क}+\text{ख}}{२}\,\text{कोस्प}\,\frac{\text{क}-\text{ख}}{२}$

(३) $\frac{\text{ज्या क}+\text{ज्या ख}}{\text{कोज्या क}+\text{कोज्या ख}}=\text{स्प}\,\frac{\text{क}=\text{ख}}{२}$

(४) $\frac{\text{ज्या क}-\text{ज्या ख}}{\text{कोज्या क}+\text{कोज्या ख}}=\text{स्प}\,\frac{१}{२}(\text{क}-\text{ख})$

(५) $\frac{\text{कोज्या क} + \text{कोज्या ख}}{\text{कोज्या क} - \text{कोज्या ख}} = -\frac{\text{कोस्प } \frac{1}{2}(\text{क} + \text{ख})}{\text{स्प } \frac{1}{2}(\text{क} - \text{ख})}$

(६) ज्या ८०° − ज्या ४०° − ज्या $२०^\circ = ०$

(७) कोज्या २०° + कोज्या १००° + कोज्या $१४०^\circ = ०$

(उत्तर प्रदेश १९३३)

(८) कोज्या क + कोज्या $\left(\text{क} + \frac{२}{३}\pi\right)$ + कोज्या $\left(\text{क} + \frac{४}{३}\pi\right) = ०$

(९) ज्या क + ज्या $\left(\text{क} + \frac{२}{३}\pi\right)$ + ज्या $\left(\text{क} + \frac{४}{३}\pi\right) = ०$

(१०) कोस्प $\frac{\pi}{८}$ − स्प $\frac{\pi}{८} = २$

(११) $\frac{\text{ज्या ५ क} - \text{ज्या ३ क}}{\text{कोज्या ३ क} + \text{कोज्या ५ क}} = \text{स्प क}$

(१२) $\frac{\text{ज्या }(४\text{ क} - २\text{ ख}) + \text{ज्या }(४\text{ ख} - २\text{ क})}{\text{कोज्या }(४\text{ क} - २\text{ख}) + \text{कोज्या }(४\text{ ख} - २\text{ क})}$

$= \text{स्प }(\text{क} + \text{ख})$

(१३) $\frac{\text{कोस्प ३ क} + \text{कोस्प ५ क}}{\text{कोस्प ३ क} - \text{कोस्प ५ क}} = ४ \text{ कोज्या २ क कोज्या ४ क}$

(१४) ज्या क + ज्या २ क + ज्या ३ क

= ज्या २ क (१ + २ कोज्या क)

(१५) ज्या क + २ ज्या ३ क + ज्या ५ क

$= ४ \text{ कोज्या}^२ \text{ क ज्या ३ क}$

(१६) $\frac{\text{ज्या क} + \text{ज्या ३ क} + \text{ज्या ५ क}}{\text{कोज्या क} + \text{कोज्या ३ क} + \text{कोज्या ५ क}} = \text{स्प ३ क}$

(१७) $\frac{\text{ज्या क} + \text{ज्या ३ क} + \text{ज्या ५ क} + \text{ज्या ७ क}}{\text{कोज्या क} + \text{कोज्या ३ क} + \text{कोज्या ५ क} + \text{कोज्या ७ क}}$

= स्प ४ क (उत्तर प्रदेश १९४८)

(१८) $\dfrac{\text{ज्या}(\text{क}+\text{ख})-२\ \text{ज्या क}+\text{ज्या}(\text{क}-\text{ख})}{\text{कोज्या}(\text{क}+\text{ख})-२\ \text{कोज्या क}+\text{कोज्या}(\text{क}-\text{ख})}$

$=\text{स्प क}$

(१९) $\dfrac{\text{कोज्या २ क}+\text{ज्या २ क}-\text{कोज्या क}+\text{ज्या क}}{\text{कोज्या २ क}-\text{ज्या २ क}+\text{कोज्या क}+\text{ज्या क}}=\text{स्प}\ \dfrac{३}{२}\text{क}$

(२०) $\dfrac{\text{ज्या}(\text{क}+३\ \text{ख})+\text{ज्या}(३\ \text{ख}+\text{क})}{\text{ज्या २ क}+\text{ज्या २ख}}$

$=२\ \text{कोज्या}(\text{क}+\text{ख})$ (उत्तर प्रदेश १९४७)

(२१) $\dfrac{\text{ज्या}\ ७५^\circ-\text{ज्या}\ १५^\circ}{\text{कोज्या}\ ७५^\circ+\text{कोज्या}\ १५^\circ}=\dfrac{१}{\sqrt{३}}$

(२२) $\dfrac{\text{ज्या}\ ८०^\circ-\text{ज्या}\ १०^\circ}{\text{ज्या}\ ८०^\circ+\text{ज्या}\ १०^\circ}=\text{स्प}\ ३५^\circ$

(२३) $\dfrac{(\text{कोज्या क}-\text{कोज्या ३ क})(\text{ज्या ८ क}+\text{ज्या २ क})}{(\text{ज्या ५ क}-\text{ज्या क})(\text{कोज्या ४ क}-\text{कोज्या ६ क})}=१$

(२४) $\text{कोज्या}^२\ \text{क}+\text{कोज्या}^२(१२०^\circ+\text{क})+$
$\text{कोज्या}^२(१२०^\circ-\text{क})=\frac{३}{२}$ (पटना १९३७, राजपूताना १९४२)

(२५) $\text{ज्या क}+\text{ज्या २ क}+\text{ज्या ३ क}+\text{ज्या ४ क}$

$=४\ \text{कोज्या}\ \frac{\text{क}}{२}-\text{कोज्या क ज्या}\ \frac{५\ \text{क}}{२}$

(२६) $\text{ज्या क}+\text{ज्या ३ क}+\text{ज्या ५ क}+\text{ज्या ७ क}$

$=\text{कोज्या क कोज्या २ क ज्या ४ क}$

(२७) $\text{ज्या}(\text{ख}+\text{ग}-\text{क})+\text{ज्या}(\text{ग}+\text{क}-\text{ख})$
$+\text{ज्या}(\text{क}+\text{ख}-\text{ग})-\text{ज्या}(\text{क}+\text{ख}+\text{ग})=४\ \text{ज्या क ज्या ख}$
ज्या ग (उत्तर प्रदेश १९२८)

(२८) $\text{ज्या}(\text{ख}-\text{ग})+\text{ज्या}(\text{ग}-\text{क})+\text{ज्या}(\text{क}-\text{ख})$

$+४\ \text{ज्या}\ \frac{\text{ख}-\text{ग}}{२}\ \text{ज्या}\ \frac{\text{ग}-\text{क}}{२}\ \text{ज्या}\ \frac{\text{क}-\text{ख}}{२}=०$ (राजपूताना १९४०)

(२९) कोज्या क + कोज्या ख + कोज्या ग + कोज्या (क + ख + ग)

$$= ४ \text{ कोज्या } \frac{ख + ग}{२} \text{ कोज्या } \frac{ग + क}{२} \text{ कोज्या } \frac{क + ख}{२}$$

(उत्तर प्रदेश १९२८, १९४५)

(३०) $$\frac{\text{कोज्या } (क + ख + ग) + \text{कोज्या } (-क + ख + ग)}{\text{ज्या } (क + ख + ग) + \text{ज्या } (-क + ख + ग)}$$

$$\frac{+ \text{कोज्या } (क - ख + ग) + \text{कोज्या } (क + ख - ग)}{- \text{ज्या } (क - ख + ग) + \text{ज्या } (क + ख - ग)} = \text{कोस्प } ख$$

(३१) ज्या १०° + ज्या २०° + ज्या ४०° + ज्या ५०°

= ज्या ७०° + ज्या ८०°

(३२) $$\left\{ \text{कोस्प } क + \text{कोस्प } \left(क - \frac{\pi}{२} \right) \right\} \left\{ \text{स्प } \left(\frac{\pi}{४} - क \right) \right.$$

$$\left. + \text{स्प } \left(\frac{\pi}{४} + क \right) \right\} = ४ \text{ व्युज्या } २ क$$

(३३) $$\frac{\text{व्युको } ८ क - १}{\text{व्युको } ४ क - १} = \frac{\text{स्प } ८ क}{\text{स्प } २ क}$$

(३४) यदि

ज्या क = च ज्या ख

सिद्ध करो कि

$$\text{स्प } \frac{१}{२} (क - ख) = \frac{च - १}{१ + च} \text{ कोस्प } \frac{१}{२} (क + ख)$$

(३५) यदि

कोज्या क = च कोज्या ख

सिद्ध करो कि

$$\text{स्प } \frac{१}{२} (क - ख) = \frac{१ - च}{१ + च} \text{ कोस्प } \frac{१}{२} (क + ख)$$

(३६) यदि

कोज्या य ज्या (थ + क) = ज्या (थ − क) कोज्या र

सिद्ध करो कि

$$\text{स्प } \frac{१}{२}(\text{य} + \text{र}) \text{ स्प } \frac{१}{२}(\text{य} - \text{र}) = \text{कोस्प थ स्प क}$$

(३७) यदि

कोज्या क + कोज्या ख = $\frac{१}{३}$ और

ज्या क + ज्या ख = $\frac{१}{४}$

सिद्ध करो कि

$$\text{स्प } \frac{१}{२}(\text{क} + \text{ख}) = \frac{३}{४}$$

(३८) समीकरण क कोज्या य + ख ज्या य = ग को सन्तुष्ट करने वाले च और छ दो कोण हैं, सिद्ध करो कि

$$\text{ज्या } (\text{च} + \text{छ}) = \frac{२ \text{ क ख}}{\text{क}^२ + \text{ख}^२}$$ (उत्तर प्रदेश १९२८, १९४९)

सरल करोः—

(३९) $$\frac{\text{कोज्या ६ थ} + ६ \text{ कोज्या ४ थ} + १५ \text{ कोज्या २ थ} + १०}{\text{कोज्या ५ थ} + ५ \text{ कोज्या ३ थ} + १० \text{ कोज्या थ}}$$

(उत्तर प्रदेश १९२७, १९४४)

(४०) $$\frac{१}{२५६}(\text{कोज्या ९ थ} + \text{कोज्या ७ थ}) - \frac{१}{६४}(\text{कोज्या ५ थ} + \text{कोज्या ३ थ} + \frac{३}{१२८} \text{कोज्या थ}$$

(उत्तर प्रदेश १९२८)

(६६) धारा (६४) के समीकरण १, २, ३, ४ बहुत ही महत्वपूर्ण हैं। वे इस प्रकार भी याद किये जाने चाहियेः—

२ज्या क कोज्या ख = ज्या (क+ख)+ज्या (क−ख)

$$2 \sin A \cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B) \quad \ldots(१)$$

२ कोज्या क ज्या ख=ज्या (क+ख)−ज्या (क−ख)

$2 \cos A \sin B = \sin (A+B) - \sin (A-B)$ ...(२)

२ कोज्या क कोज्या ख=कोज्या(क+ख)+कोज्या(क−ख) ...(३)

$2 \cos A \cos B = \cos (A+B) + \cos (A-B)$

२ ज्या क ज्या ख=कोज्या (क−ख)−कोज्या(क+ख)...(४)

$2 \sin A \sin B = \cos (A-B) - \cos (A+B)$

(६७) उदाहरण १—२ ज्या ५ क ज्या ७ क

= कोज्या (५ क − ७ क) − कोज्या (५ क + ७ क)

= कोज्या २ क − कोज्या १२ क

उदाहरण २— २ कोज्या $\frac{\pi \text{ क}}{४}$ ज्या $\frac{३ \pi \text{ क}}{४}$

$= \text{ज्या} \left(\frac{\pi \text{ क}}{४} + \frac{३ \pi \text{ क}}{४} \right) - \text{ज्या} \left(\frac{\pi \text{ क}}{४} - \frac{३ \pi \text{ क}}{४} \right)$

$= \text{ज्या } \pi \text{ क} + \text{ज्या} \frac{\pi \text{ क}}{२}$

उदाहरण ३—ज्या क कोज्या ३ क + ज्या ३ क कोज्या ७ क

= $\frac{१}{२}$ [२ ज्या क कोज्या ३ क + २ ज्या ३ क कोज्या ७ क]

= $\frac{१}{२}$ [ज्या ४ क − ज्या २ क + ज्या १० क − ज्या ४ क]

= $\frac{१}{२}$ [ज्या १० क − ज्या २ क]

उदाहरण ४—सिद्ध करो

$\text{स्प } \frac{१}{२}\left(\text{क} + \text{ख}\right) + \text{स्प } \frac{१}{२}\left(\text{क} - \text{ख}\right) = \frac{२ \text{ ज्या क}}{\text{कोज्या क} + \text{कोज्या ख}}$

$\text{वाम पक्ष} = \frac{\text{ज्या } \frac{१}{२} (\text{क} + \text{ख})}{\text{कोज्या } \frac{१}{२} (\text{क} + \text{ख})} + \frac{\text{ज्या } \frac{१}{२} (\text{क} - \text{ख})}{\text{कोज्या } \frac{१}{२} (\text{क} - \text{ख})}$

$$= \frac{२ \text{ ज्या } \frac{१}{२}(\text{क}+\text{ख}) \text{ कोज्या } \frac{१}{२}(\text{क}-\text{ख})}{२ \text{ ज्या } \frac{१}{२}(\text{क}+\text{ख}) \text{ कोज्या } \frac{१}{२}(\text{क}-\text{ख})}$$

$$- \frac{२ \text{ कोज्या } \frac{१}{२}(\text{क}+\text{ख}) \text{ ज्या } \frac{१}{२}(\text{क}-\text{ख})}{२ \text{ कोज्या } \frac{१}{२}(\text{क}+\text{ख}) \text{ कोज्या } \frac{१}{२}(\text{क}-\text{ख})}$$

$$= \frac{\text{ज्या क} + \text{ज्या ख} + \text{ज्या क} - \text{ज्या ख}}{\text{कोज्या क} + \text{कोज्या ख}}$$

$$= \frac{२ \text{ ज्या क}}{\text{कोज्या क} + \text{कोज्या ख}}$$

उदाहरण ५—सिद्ध करो

$$२ \text{ कोज्या } \frac{\pi}{१३} \text{ कोज्या } \frac{९\pi}{१३} + \text{कोज्या } \frac{३\pi}{१३} + \text{कोज्या } \frac{५\pi}{१३} = ०$$

$$\text{वाम पक्ष} = २ \text{ कोज्या } \frac{\pi}{१३} \text{ कोज्या } \frac{९\pi}{१३} + २ \text{ कोज्या } \frac{४\pi}{१३} \text{ कोज्या } \frac{\pi}{१३}$$

$$= २ \text{ कोज्या } \frac{\pi}{१३}\left(\text{कोज्या } \frac{९\pi}{१३} + \text{कोज्या } \frac{४\pi}{१३}\right)$$

$$= ४ \text{ कोज्या } \frac{\pi}{१३} \text{ कोज्या } \frac{\pi}{२} \text{ कोज्या } \frac{५\pi}{२६}$$

$$= ०$$

उदाहरण ६—सिद्ध करो

$$\text{कोज्या } २०^\circ \text{ कोज्या } ४०^\circ \text{ कोज्या } ८०^\circ = \frac{१}{८}$$

$$\text{वाम पक्ष} = \frac{१}{२} \text{ कोज्या } २०^\circ (२ \text{ कोज्या } ४०^\circ \text{ कोज्या } ८०^\circ)$$

$$= \frac{१}{२} \text{ कोज्या } २०^\circ (\text{कोज्या } १२०^\circ + \text{कोज्या } ४०^\circ)$$

$$= \frac{१}{२} \text{ कोज्या } २०^\circ \left(-\frac{१}{२} + \text{कोज्या } ४०^\circ\right)$$

$$= -\frac{१}{४} \text{ कोज्या } २०^\circ + \frac{१}{२} \text{ कोज्या } २०^\circ \text{ कोज्या } ४०^\circ$$

$$= -\frac{१}{४} \text{ कोज्या } २०^\circ + \frac{१}{४}(\text{कोज्या } ६०^\circ \text{ कोज्या } २०^\circ)$$

$$= -\frac{१}{४} \text{ कोज्या } २०^\circ + \frac{१}{८} + \frac{१}{४} \text{ कोज्या } २०^\circ$$

$$= \frac{१}{८}$$

अभ्यास १२

निम्नलिखित गुणनफलों को योग और अन्तर में प्रकट करो :—

(१) २ ज्या ३ क ज्या २ क

(२) २ ज्या ५०° कोज्या ६०°

(३) २ कोज्या ११ थ कोज्या २ थ

(४) २ ज्या $\frac{\text{क} + \text{२ ख}}{\text{२}}$ कोज्या $\frac{\text{२ क} - \text{ख}}{\text{२}}$

(५) २ ज्या थ कोज्या (क + $\overline{\text{न} - \text{१}}$ थ)

सिद्ध करो कि

(६) ज्या ८ क कोज्या क − ज्या ६ क कोज्या ३ क
= कोज्या ५ क ज्या २ क

(७) ज्या (ख + ग) ज्या (ख − ग) + ज्या (ग + क)
ज्या (ग − क) + ज्या (क + ख) ज्या (क − ख) = ०

(८) ज्या (ख − ग) कोज्या (ख + ग) + कोज्या (ग − क)
ज्या (ग + क) − ज्या (क + ख) कोज्या (क − ख) = ०

(९) कोज्या क ज्या (ख − ग) + कोज्या ख ज्या (ग − क)
+ कोज्या ग ज्या (क − ख) = ०

(१०) ज्या (क + ४५°) ज्या (क − ४५°)
= − $\frac{\text{१}}{\text{२}}$ कोज्या २ क

(११) ज्या थ ज्या २ थ + ज्या ३ थ ज्या ६ थ − ज्या ४ थ
ज्या ५ थ = ०

(१२) कोज्या (३६° − क) कोज्या (३६° + क)
+ कोज्या (५४° + क) कोज्या (५४° − क) = कोज्या २ क

(१३) कोज्या ३२° कोज्या ७०° + कोज्या १४४° ज्या ८८°
+ ज्या ६८° कोज्या ५६° = ०

(१४) $$\frac{\text{ज्या क ज्या २ क + ज्या ३ क ज्या ६ क + ज्या ४ क ज्या १३ क}}{\text{ज्या क कोज्या २ क + ज्या ३ क कोज्या ६ क + ज्या ४ क कोज्या १३ क}} = \text{स्प ९ क}$$

(१५) ज्या क ज्या (६०° − क) ज्या (६०° + क) $= \frac{१}{४}$ ज्या ३ क

(१६) कोज्या क कोज्या (६०° − क) कोज्या (६०° + क) $= \frac{१}{४}$ कोज्या ३ क

(१७) ज्या (ख − ग) कोज्या (क − घ) + ज्या (ग − क) कोज्या (ख − घ) + ज्या (क − ख) कोज्या (ग − घ) = ०

(१८) ज्या २०° ज्या ४०° ज्या ६०° ज्या ८०° $= \frac{३}{१६}$ (रा० १९५१)

(१९) स्प (ख − ग) + स्प (ग − क) + स्प (क − ख) = स्प (ख − ग) स्प (ग − क) स्प (क − ख)

(२०) $$\frac{\text{ज्या}^{२}\text{ क} - \text{ज्या}^{२}\text{ ख}}{\text{ज्या क कोज्या क − ज्या ख कोज्या ख}} = \text{स्प (क + ख)}$$

(२१) ज्या (२ स + १) क ज्या क = ज्या^{२} (स + १) क − ज्या^{२} स क

(२२) $$\frac{\text{२ कोज्या } २^{स}\text{ थ + १}}{\text{२ कोज्या थ + १}} = \text{(२ कोज्या थ − १)}$$
(२ कोज्या २ थ − १) (२ कोज्या २^{२} थ − १) ......(२ कोज्या २$^{स-१}$ थ − १)

[संकेत—(२ कोज्या थ + १) (२ कोज्या थ − १) = २ कोज्या २ थ + १ का प्रयोग करो]

(२३) $$\frac{\text{स्प } २^{स}\text{ थ}}{\text{स्प थ}} = \text{(१ + व्युको २ थ) (१ + व्युको } २^{२}\text{ थ)}$$
......(१ + व्युको २^{स} थ)

[संकेत – स्प थ (१+व्युको २ थ) = स्प २ थ का प्रयोग करो]

(२४) यदि

$$\text{स्प}^2 \text{ क} = १ + २ \text{ स्प}^2 \text{ ख}$$

सिद्ध करो कि

कोज्या २ ख = १ + २ कोज्या २ क

अध्याय ८

अपवर्त्तक कोण

(Submultiple Angles)

(६८) यदि सूक्त (६०) और (६२) में दिये हुये सूत्रों में क के स्थान पर क्रमशः $\frac{क}{२}$ और $\frac{क}{३}$ रख दिया जाय तो उनकी सत्यता में कोई अन्तर नहीं पड़ेगा। अतः

$$ज्या\ क = २\ ज्या\ \frac{क}{२}\ कोज्या\ \frac{क}{२} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(१)$$

$$\left(\sin A = 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}\right)$$

$$कोज्या\ क = कोज्या^२ \frac{क}{२} - ज्या^२ \frac{क}{२}$$

$$= २\ कोज्या^२ \frac{क}{२} - १ = १ - २\ ज्या^२\ क \quad (२)$$

$$\left(\cos A = \cos^2 \frac{A}{2} - \sin^2 \frac{A}{2}\right.$$

$$\left. = 2 \cos^2 \frac{A}{2} - 1 = 1 - 2 \sin^2 \frac{A}{2}\right)$$

$$\text{स्प क} = \frac{\text{२ स्प}\,\frac{\text{क}}{\text{२}}}{\text{१} - \text{स्प}^{\text{२}}\,\frac{\text{क}}{\text{२}}} \quad \cdots\cdots\cdots (\text{३})$$

$$\tan A = \frac{2\tan\frac{A}{2}}{1-\tan^2\frac{A}{2}}$$

$$\text{ज्या क} = \text{३ ज्या}\,\frac{\text{क}}{\text{३}} - \text{४ ज्या}^{\text{३}}\,\frac{\text{क}}{\text{३}} \quad \cdots\cdots\cdots (\text{४})$$

$$\left(\sin A = 3\sin\frac{A}{3} - 4\sin^3\frac{A}{3}\right)$$

$$\text{कोज्या क} = \text{४ कोज्या}^{\text{३}}\,\frac{\text{क}}{\text{३}} - \text{३ कोज्या}\,\frac{\text{क}}{\text{३}} \cdots (\text{५})$$

$$\left(\cos A = 4\cos^3\frac{A}{3} - 3\cos\frac{A}{3}\right)$$

$$\text{स्प क} = \frac{\text{३ स्प}\frac{\text{क}}{\text{३}} - \text{स्प}^{\text{३}}\frac{\text{क}}{\text{३}}}{\text{१} - \text{३ स्प}^{\text{२}}\frac{\text{क}}{\text{३}}} \quad \cdots\cdots\cdots (\text{६})$$

$$\tan A = \frac{3\tan\frac{A}{3} - \tan^3\frac{A}{3}}{1 - 3\tan^2\frac{A}{2}}$$

(६९) $ज्या\ क = २\ ज्या\ \frac{क}{२}\ कोज्या\ \frac{क}{२}$

$$= \frac{२\ ज्या\ \frac{क}{२}\ कोज्या\ \frac{क}{२}}{कोज्या^२\ \frac{क}{२} + ज्या^२\ \frac{क}{२}}$$

[अंश और हर दोनों में $कोज्या^२\ \frac{क}{२}$ का भाग देकर]

$$= \frac{२\ स्प\ \frac{क}{२}}{१ + स्प^२\frac{क}{२}}$$

$$कोज्या\ क = कोज्या^२\ \frac{क}{२} - ज्या^२\ \frac{क}{२}$$

$$= \frac{कोज्या^२\frac{क}{२} - ज्या^२\ \frac{क}{२}}{कोज्या^२\frac{क}{२} + ज्या^२\ \frac{क}{२}}$$

$$= \frac{१ - स्प^२\ \frac{क}{२}}{१ + स्प^२\ \frac{क}{२}}$$

(७०) कोण $\frac{क}{२}$ की त्रिकोणमितीय निष्पत्तियों को कोज्या क के रूप में प्रकट करना—

$$\text{कोज्या क} = १ - २\text{ज्या}^२\frac{\text{क}}{२}$$

$$२\text{ज्या}^२\frac{\text{क}}{२} = १ - \text{कोज्या क}$$

$$\text{अतः ज्या}\frac{\text{क}}{२} = \pm\sqrt{\left(\frac{१ - \text{कोज्या क}}{२}\right)}$$

$$\text{तथा कोज्या क} = २\ \text{कोज्या}^२\frac{\text{क}}{२} - १$$

$$\text{कोज्या}\frac{\text{क}}{२} = \pm\sqrt{\frac{१ + \text{कोज्या क}}{२}}$$

$$\text{इस प्रकार स्प}\frac{\text{क}}{२} = \frac{\text{ज्या}\frac{\text{क}}{२}}{\text{कोज्या}\frac{\text{क}}{२}} = \pm\sqrt{\frac{१ - \text{कोज्या क}}{१ + \text{कोज्या क}}}$$

टिप्पणी—इन सूत्रों में धन और ऋण दोनों ही संशयात्मक चिन्ह हैं। इस संशय का कारण आगे के अध्याय में वर्णन किया जायगा। यदि यह पता लग जाय कि कोण कौन से पाद (quadrant) में है तो किसी किसी स्थान पर उसका चिन्ह भी निश्चय किया जा सकता है जैसा कि नीचे के उदाहरण से प्रकट है।

(७१) **उदाहरण १**—ज्या $२२\frac{१}{२}^\circ$ और कोज्या $२२\frac{१}{२}^\circ$ का मान बताओ।

$$\text{ज्या}\ २२\tfrac{१}{२}^\circ = \pm\sqrt{\frac{१ - \text{कोज्या}\ ४५^\circ}{२}}$$

$$= \pm\sqrt{\frac{२ - \sqrt{२}}{४}} = \pm\frac{१}{२}\sqrt{२ - \sqrt{२}}$$

किन्तु ज्या २२$\frac{१}{२}$° सदैव धनात्मक होता है अतः

$$ज्या\ २२\frac{१}{२}° = \frac{१}{२}\sqrt{२-\sqrt{२}}$$

$$कोज्या २२\frac{१}{२}° = +\sqrt{\frac{१+कोज्या ४५°}{२}} = \frac{१}{२}\sqrt{२+\sqrt{२}}$$

उदाहरण २—यदि कोज्या ४८०° = − $\frac{१}{२}$ हो तो ज्या २४०° और कोज्या २४०° का मान बताओ।

$$ज्या\ २४०° = \pm\sqrt{\frac{१-कोज्या ४८०°}{२}} = \pm\frac{\sqrt{१+\frac{१}{२}}}{\sqrt{२}}$$

$$= \pm\frac{\sqrt{३}}{२}$$

$$कोज्या\ २४०° = \pm\sqrt{\frac{१+कोज्या ४८०°}{२}} = \pm\sqrt{\frac{१-\frac{१}{२}}{२}}$$

$$= \pm\frac{१}{२}$$

चूँकि २४०° तीसरे पाद (quadrant) में है अतः ज्या २४०° और कोज्या २४०° दोनों ही ऋणात्मक होंगे।

$$\therefore ज्या\ २४०° = -\frac{\sqrt{३}}{२},\ कोज्या\ २४०° = -\frac{१}{२}$$

उदाहरण ३—सिद्ध करो कि

$$२\ ज्या \frac{क}{२^{स}} = \sqrt{२-\sqrt{२+\sqrt{२+\ldots+\sqrt{२+२\ कोज्या क}}}}$$

जब कि वर्गमूल चिन्ह स संख्या बार लिया गया है और क < २ समकोण।

$$कोज्या \frac{क}{२} = \sqrt{\frac{१+कोज्या क}{२}}$$

$$२\ \text{कोज्या}\frac{\text{क}}{२} = \sqrt{(२+२\ \text{कोज्या क})}$$

अब क के स्थान पर $\frac{\text{क}}{२}$ रक्खो

$$\therefore\ २\ \text{कोज्या}\frac{\text{क}}{२^२} = \sqrt{२+२\ \text{कोज्या}\ \frac{\text{क}}{२}}$$

$$= \sqrt{२+\sqrt{२+२\ \text{कोज्या क}}}$$

$$\therefore\ २\ \text{कोज्या}\frac{\text{क}}{२^३} = \sqrt{२+\sqrt{२+\sqrt{२+२\text{कोज्या क}}}}$$

....

....

अतः

$$२\ \text{कोज्या}\ \frac{\text{क}}{२^\text{स}} = \sqrt{२+\sqrt{२+\sqrt{२+\ ...+\sqrt{२+२\ \text{कोज्या क}}}}}$$

दोनों ओर का वर्ग (square) लेकर

$$४\text{कोज्या}^२\ \frac{\text{क}}{२^\text{स}} = २+\sqrt{२+\sqrt{२+\cdots+\sqrt{२+२+\text{कोज्या क}}}}$$

($४\ \text{ज्या}^२\ \frac{\text{क}}{२^\text{स}}$ दोनों पक्षों में जोड़ कर)

$$४\ (\text{कोज्या}^२\frac{\text{क}}{२^\text{स}} + \text{ज्या}^२\ \frac{\text{क}}{२^\text{स}})$$

$$= २+\sqrt{२+\sqrt{२+\cdots\sqrt{२+२\ \text{कोज्या क}}}}$$

$$+ ४ \text{ ज्या}^२ \frac{क}{२^स}$$

$$\therefore ४ = २ + \sqrt{२ + \sqrt{२ + \ldots \sqrt{२ + २ \text{ कोज्या } क}}} + ४ \text{ ज्या}^२ \frac{क}{२^स}$$

$$४ \text{ ज्या}^२ \frac{क}{२^५} = २ - \sqrt{२ + \sqrt{२ + \ldots \sqrt{२ + २ \text{ कोज्या } क}}}$$

अथवा

$$२ \text{ ज्या} \frac{क}{२^स} = \sqrt{२ - \sqrt{२ + \sqrt{२ + \ldots \sqrt{२ + २ \text{ कोज्या } क}}}}$$

(७२) कोण $\frac{क}{२}$ की त्रिकोणमितीय निष्पत्तियों को ज्या क के रूप में प्रकट करना —

$$१ + \text{ज्या } क = \text{ज्या}^२ \frac{क}{२} + \text{कोज्या}^२ \frac{क}{२} + २ \text{ज्या} \frac{क}{२} \text{ कोज्या } \frac{क}{२}$$

$$१ - \text{ज्या } क = \text{ज्या}^२ \frac{क}{२} + \text{कोज्या}^२ \frac{क}{२} - २ \text{ ज्या} \frac{क}{२} \text{कोज्या } \frac{क}{२}$$

अथवा

$$\left(\text{ज्या} \frac{क}{२} + \text{कोज्या} \frac{क}{२}\right)^२ = १ + \text{ज्या } क$$

$$\left(\text{ज्या} \frac{क}{२} - \text{कोज्या} \frac{क}{२}\right)^२ = १ - \text{ज्या } क$$

अथवा

$$\text{ज्या}\frac{\text{क}}{२}+\text{कोज्या}\frac{\text{क}}{२}=\pm\sqrt{१+\text{ज्या क}}\ldots \quad (१)$$

$$\text{ज्या}\frac{\text{क}}{२}-\text{कोज्या}\frac{\text{क}}{२}=\pm\sqrt{१-\text{ज्या क}}\ldots \quad (२)$$

(१) और (२) का क्रमशः योग और अन्तर लेकर—

$$२\ \text{ज्या}\frac{\text{क}}{२}=\pm\sqrt{१+\text{ज्या क}}\pm\sqrt{१-\text{ज्या क}} \quad (३)$$

$$2\sin\frac{A}{2}=\pm\sqrt{1+\sin A}\pm\sqrt{1-\sin A}$$

$$२\ \text{कोज्या}\frac{\text{क}}{२}=\pm\sqrt{१+\text{ज्या क}}\mp\sqrt{१-\text{ज्या क}} \quad (४)$$

$$2\cos\frac{A}{2}=\pm\sqrt{1+\sin A}\mp\sqrt{1-\sin A}$$

$$\text{स्प}\frac{\text{क}}{२}=\frac{\pm\sqrt{१+\text{ज्या क}}\pm\sqrt{१-\text{ज्या क}}}{\pm\sqrt{१+\text{ज्या क}}\mp\sqrt{१-\text{ज्या क}}} \quad (५)$$

टिप्पणी—सूत्र (३), (४), (५) दोनों में ही धन और ऋण दोनों के संशयात्मक चिन्ह हैं। इस संशय का कारण आगे के अध्याय में वर्णन किया जायगा। यदि यह पता लग जाय कि कोण कौन से पाद (quadrant) में है तो किसी-किसी स्थान पर उसका चिन्ह भी निश्चय किया जा सकता है।

(७३) **उदाहरण** १—ज्या १५° और कोज्या १५° का मान बताओ यदि ज्या ३०° = ½ हो।

$$\text{कोज्या } 15^\circ + \text{ज्या } 15^\circ = \pm\sqrt{1 + \text{ज्या } 30^\circ} = \pm\sqrt{1 + \tfrac{1}{2}}$$
$$= \pm\sqrt{\tfrac{3}{2}}$$

$$\text{कोज्या } 15^\circ - \text{ज्या } 15^\circ = \pm\sqrt{1 - \text{ज्या } 30^\circ} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

चूंकि ज्या १५° और कोज्या १५° दोनों ही धनात्मक है तथा कोज्या १५°, ज्या १५° से बड़ा है, अतः ज्या १५° + कोज्या १५° और ज्या १५° − कोज्या १५° क्रमशः धनात्मक एवं ऋणात्मक हैं।

$$\text{अतः ज्या } 15^\circ + \text{कोज्या } 15^\circ = +\sqrt{\tfrac{3}{2}}$$

$$\text{ज्या } 15^\circ - \text{कोज्या } 15^\circ = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore \text{ ज्या } 15^\circ = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}} \text{ एवं कोज्या } 15^\circ = \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}}$$

(७४) यदि $\frac{\text{क}}{2}$, −४५° और ४५° के बीच में हो तो कोज्या $\frac{\text{क}}{2}$ धनात्मक होता है एवं उसका संख्यात्मक मान (numerical value) ज्या $\frac{\text{क}}{2}$ से बड़ा होता है।

अतः ज्या $\frac{\text{क}}{2}$ + कोज्या $\frac{\text{क}}{2}$ धनात्मक है

और ज्या $\frac{\text{क}}{2}$ − कोज्या $\frac{\text{क}}{2}$ ऋणात्मक है

यदि $\frac{\text{क}}{2}$, ४५° एवं १३५° के बीच में हो तो ज्या $\frac{\text{क}}{2}$ धनात्मक होता है एव उसका संख्यात्मक मान (numerical value) कोज्या $\frac{\text{क}}{2}$ से बड़ा होता है।

अतः ज्या $\frac{क}{२}$ + कोज्या $\frac{क}{२}$ धनात्मक है

ज्या $\frac{क}{२}$ − कोज्या $\frac{क}{२}$ धनात्मक है

यदि $\frac{क}{२}$, १३५° और २२५° के बीच में हो तो कोज्या $\frac{क}{२}$ ऋणात्मक होता है एवं उसका संख्यात्मक मान ज्या $\frac{क}{२}$ से बड़ा होता है।

अतः ज्या $\frac{क}{२}$ + कोज्या $\frac{क}{२}$ ऋणात्मक है

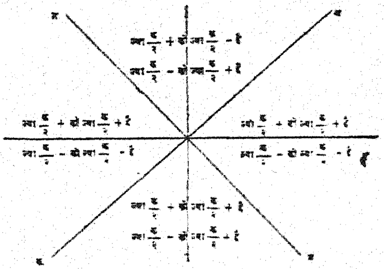
ज्या $\frac{क}{२}$ − कोज्या $\frac{क}{२}$ धनात्मक है

यदि $\frac{क}{२}$, २२५° और ३१५° के बीच में हो तो ज्या $\frac{क}{२}$ ऋणात्मक होता है एवं उसका संख्यात्मक मान कोज्या $\frac{क}{२}$ से बड़ा होता है

अतः ज्या $\frac{क}{२}$ + कोज्या $\frac{क}{२}$ ऋणात्मक है

ज्या $\frac{क}{२}$ − कोज्या $\frac{क}{२}$ ऋणात्मक है

यदि भ्रामक रेखा एक चक्कर लगाने के पश्चात् $\frac{क}{२}$ कोण बनावे तो इन मानों को प्रकट करने के लिये एक चित्र भी बनाया जा सकता है।



(७५) उदाहरण—कोण $\frac{क}{२}$ की क्या सीमायें होंगी यदि

$$२ \text{ ज्या } \frac{क}{२} = -\sqrt{१ + \text{ज्या } क} - \sqrt{१ - \text{ज्या } क}$$

यहाँ पर

$$\text{ज्या } \frac{क}{२} + \text{कोज्या } \frac{क}{२} = -\sqrt{१ + \text{ज्या } क} \quad \cdots\cdots (१)$$

$$\text{ज्या } \frac{क}{२} - \text{कोज्या } \frac{क}{२} = -\sqrt{१ - \text{ज्या } क} \quad \cdots\cdots (२)$$

क्योंकि (१) और (२) के योग से ही उपर्युक्त समीकरण प्राप्त होता है।

(१) से प्रकट है कि $\frac{क}{२}$ या तो १३५° और २२५° के बीच में है या २२५° और ३१५° के बीच में है।

(२) से प्रकट है कि $\frac{क}{२}$ या तो ४५° और −४५° के बीच में है या २२५° और ३१५° के बीच में है।

अतः दोनों से प्रकट है कि $\frac{क}{२}$, २२५° और ३१५° के बीच में है।

अर्थात् $\frac{क}{२}$, $२स\pi - \frac{३\pi}{४}$ और $२स\pi - \frac{\pi}{४}$ के बीच में है।

टिप्पणी—इस विशिष्ट मान (General value) का वर्णन आगे के अध्याय में किया जायगा।

(७६) कोण $\frac{क}{२}$ की त्रिकोणमितीय निष्पत्तियों को स्प क के रूप में प्रकट करना—

$$स्प\ क = \frac{२\ स्प\ \frac{क}{२}}{१ - स्प^{२}\ \frac{क}{२}}$$

$$\therefore १ - स्प^{२}\ \frac{क}{२} = \frac{२}{स्प\ क}\ स्प\ \frac{क}{२}$$

$$अथवा\ स्प^{२}\ \frac{क}{२} + \frac{२}{स्प\ क}\ स्प\ \frac{क}{२} + \frac{१}{स्प^{२}\ क} = १ + \frac{१}{स्प^{२}\ क}$$

$$= \frac{१ + स्प^{२}\ क}{स्प^{२}\ क}$$

$$\therefore\ स्प\ \frac{क}{२} + \frac{१}{स्प\ क} = \frac{\pm\sqrt{१ + स्प^{२}\ क}}{स्प\ क}$$

$$स्प\ \frac{क}{२} = \frac{-१ \pm \sqrt{१ + स्प^{२}\ क}}{स्प\ क}$$

टिप्पणी— $\pm$ चिन्ह का संशय तभी दूर किया जा सकता है जब कि हम क का मान जानते हों।

(७७) उदाहरण १—यदि स्प $१५^{\circ} = २ - \sqrt{३}$ हो तो स्प $७\frac{१}{२}^{\circ}$ का मान निकालो।

$$\text{स्प}\ ७\tfrac{१}{२}^{\circ} = \frac{-१+\sqrt{१+(२-\sqrt{३})^{२}}}{२-\sqrt{३}}$$

$$= \frac{-१+\sqrt{८-४\sqrt{३}}}{२-\sqrt{३}}$$

$$= \frac{-१+(\sqrt{६}-\sqrt{२})}{२-\sqrt{३}} = \frac{[-१+(\sqrt{६}-\sqrt{२})][२+\sqrt{३}]}{[२-\sqrt{३}][२+\sqrt{३}]}$$

$$= (\sqrt{३}-\sqrt{१})(\sqrt{२}-१)$$

उदाहरण २—सिद्ध करो कि

$$\left(१+\text{स्प}\ \frac{\text{क}}{२}-\text{व्युको}\ \frac{\text{क}}{२}\right)\left(१+\text{स्प}\ \frac{\text{क}}{२}+\text{व्युको}\ \frac{\text{क}}{२}\right) = \text{ज्या क व्युको}^{२}\ \frac{\text{क}}{२}$$

$$\text{वामपक्ष} = \left(१+\text{स्प}\ \frac{\text{क}}{२}\right)^{२}-\text{व्युको}^{२}\ \frac{\text{क}}{२}$$

$$= १+\text{स्प}^{२}\ \frac{\text{क}}{२}+२\ \text{स्प}\ \frac{\text{क}}{२}-\text{व्युको}^{२}\ \frac{\text{क}}{२}$$

$$= \text{व्युको}^{२}\ \frac{\text{क}}{२}+२\ \text{स्प}\ \frac{\text{क}}{२}-\text{व्युको}^{२}\ \frac{\text{क}}{२}$$

$$= २\ \text{स्प}\ \frac{\text{क}}{२}$$

$$= \frac{२\ \text{ज्या}\ \frac{\text{क}}{२}}{\text{कोज्या}\ \frac{\text{क}}{२}}\cdot\frac{\text{कोज्या}\ \frac{\text{क}}{२}}{\text{कोज्या}\ \frac{\text{क}}{२}}$$

$$= \frac{\text{ज्या क}}{\text{कोज्या}^{२}\ \frac{\text{क}}{२}} = \text{ज्या क व्युको}^{२}\ \frac{\text{क}}{२}$$

उदाहरण ३—यदि स्प $\frac{क}{२} = \sqrt{\frac{१ - ई}{१ + ई}}$ स्प $\frac{ख}{२}$

सिद्ध करो कि

$$कोज्या\ ख = \frac{कोज्या\ क - ई}{१ - ई\ कोज्या\ क}$$

(उत्तर प्रदेश १९३६, १९४१, १९४४, १९४९ राजपूताना १९४४ दिल्ली १९४२)

$$स्प \frac{क}{२} = \sqrt{\frac{१ - ई}{१ + ई}}\ स्प \frac{ख}{२}$$

$$\therefore स्प \frac{ख}{२} = \sqrt{\frac{१ + ई}{१ - ई}}\ स्प \frac{क}{२}$$

$$किन्तु\ कोज्या\ ख = \frac{१ - स्प^२ \frac{ख}{२}}{१ + स्प^२ \frac{ख}{२}}$$

$$= \frac{१ - \frac{१ + ई}{१ - ई} स्प^२ \frac{क}{२}}{१ + \frac{१ + ई}{१ - ई} स्प^२ \frac{क}{२}}$$

$$= \frac{(१ - ई) - (१ + ई)\ स्प^२ \frac{क}{२}}{(१ - ई) + (१ + ई)\ स्प^२ \frac{क}{२}}$$

$$= \frac{(१ - ई)\ कोज्या^२ \frac{क}{२} - (१ + ई)\ ज्या^२ \frac{क}{२}}{(१ - ई)\ कोज्या^२ \frac{क}{२} + (१ + ई)\ ज्या^२ \frac{क}{२}}$$

$$\frac{\text{कोज्या}^2 \frac{\text{क}}{2} - \text{ज्या}^2 \frac{\text{क}}{2} - \text{ई}\left(\text{कोज्या}^2 \frac{\text{क}}{2} + \text{ज्या}^2 \frac{\text{क}}{2}\right)}{\text{कोज्या}^2 \frac{\text{क}}{2} + \text{ज्या}^2 \frac{\text{क}}{2} - \text{ई}\left(\text{कोज्या}^2 \frac{\text{क}}{2} - \text{ज्या}^2 \frac{\text{क}}{2}\right)}$$

$$= \frac{\text{कोज्या क} - \text{ई}}{१ - \text{ई कोज्या क}}$$

अभ्यास १३

(१) यदि कोज्या क $= \frac{११}{६१}$ और ज्या ख $= \frac{४}{५}$ हो तो ज्या$^2 \frac{\text{क} - \text{ख}}{२}$ और कोज्या$^2 \frac{\text{क} + \text{ख}}{२}$ का मान बताओ, जबकि क और ख दोनों ही धनात्मक न्यून कोण हैं।

(२) यदि कोज्या क $= \frac{३}{५}$ और कोज्या ख $= \frac{४}{५}$ हो तो कोज्या $\frac{\text{क} - \text{ख}}{२}$ का मान बताओ, जबकि क और ख दोनों धनात्मक न्यून कोण हैं।

निम्नलिखित के मान बताओ

(३) ज्या $७\frac{१}{२}^\circ$ (४) कोज्या $७\frac{१}{२}^\circ$

(५) स्प $३७\frac{१}{२}^\circ$ (६) स्प $२२\frac{१}{२}^\circ$

(७) स्प $११\frac{१}{४}^\circ$

सिद्ध करो

(८) $\frac{\text{ज्या क}}{१ - \text{कोज्या क}} = \text{कोस्प} \frac{\text{क}}{२}$ (९) $\frac{\text{ज्या क}}{१ + \text{कोज्या क}} = \text{स्प} \frac{\text{क}}{२}$

(१०) व्युको $\left(\frac{\pi}{४} + \text{थ}\right)$ व्युको $\left(\frac{\pi}{४} - \text{थ}\right) = २$ व्युको २ थ

(११) $\frac{१ + \text{ज्या २ क}}{१ - \text{ज्या २ क}} = \text{स्प}^2 \left(\frac{\pi}{४} + \text{क}\right)$

(१२) $(\text{कोज्या क} + \text{कोज्या ख})^2 + (\text{ज्या क} - \text{ज्या ख})^2$

$$= ४ \text{ कोज्या}^2 \frac{\text{क} + \text{ख}}{२}$$

(१३) $(\text{कोज्या क} + \text{कोज्या ख})^2 + (\text{ज्या क} + \text{ज्या ख})^2$

$$= ४ \text{ कोज्या}^2 \frac{\text{क} - \text{ख}}{२}$$

(१४) $(\text{कोज्या क} - \text{कोज्या ख})^2 + (\text{ज्या क} - \text{ज्या ख})^2$

$$= ४ \text{ ज्या}^2 \frac{\text{क} - \text{ख}}{२}$$

(१५) $\text{ज्या} \frac{\pi}{५} \text{ ज्या} \frac{२\pi}{५} \text{ ज्या} \frac{३\pi}{५} \text{ ज्या} \frac{४\pi}{५} = \frac{५}{१६}$

(१६) $\text{व्युज्या}^८ \text{ थ} - \text{ज्या}^८ \text{ थ}$

$= \text{कोज्या } २ \text{ थ} - \frac{१}{२} \text{ ज्या } २ \text{ थ ज्या } ४ \text{ थ}$

(१७) $\frac{\text{व्युको क} + \text{स्प क}}{\text{व्युको क} - \text{स्प क}} = \text{स्प}^2 \left(\frac{\pi}{४} + \frac{\text{क}}{२} \right)$

(१८) $$\frac{\text{ज्या} \frac{\text{क}}{२} - \sqrt{१ + \text{ज्या क}}}{\text{कोज्या} \frac{\text{क}}{२} - \sqrt{१ + \text{ज्या क}}} = \text{कोस्प} \frac{\text{क}}{२}$$

(१९) $\text{कोज्या}^४ \frac{\pi}{८} + \text{कोज्या}^४ \frac{३\pi}{८} + \text{कोज्या}^४ \frac{५\pi}{८}$

$$+ \text{ कोज्या}^४ \frac{७\pi}{८} = \frac{३}{२}$$

(२०) $\text{ज्या}^४ \frac{\pi}{८} + \text{ज्या}^४ \frac{३\pi}{८} + \text{ज्या}^४ \frac{५\pi}{८} + \text{ज्या}^४ \frac{७\pi}{८} = \frac{३}{२}$

(२१) $\text{कोस्प क} = \frac{१}{२} \left(\text{कोस्प} \frac{\text{क}}{२} - \text{स्प} \frac{\text{क}}{२} \right)$ (उत्तर प्रदेश १९४८)

(२२) कोज्या २ क कोज्या २ ख + ज्या² (क − ख) − ज्या² (क + ख) = कोज्या (२ क + २ ख)

(२३) $\dfrac{\text{ज्या २ क}}{\text{१ + कोज्या २ क}} \quad \dfrac{\text{कोज्या क}}{\text{१ + कोज्या क}} = \text{स्प } \dfrac{\text{क}}{\text{२}}$

(२४) (स्प ४ क + स्प २ क) (१ − स्प² ३ क स्प² क) = २ स्प ३ क व्युको² क

(२५) $\text{ज्या क} = \text{२}^{\text{स}} \text{ कोज्या } \dfrac{\text{क}}{\text{२}} \text{ कोज्या } \dfrac{\text{क}}{\text{२}^{\text{२}}} \text{ कोज्या } \dfrac{\text{क}}{\text{२}^{\text{३}}} \cdots\cdots$ $\text{कोज्या } \dfrac{\text{क}}{\text{२}^{\text{स}}} \text{ ज्या } \dfrac{\text{क}}{\text{२}^{\text{स}}}$

(२६) यदि $\text{स्प } \dfrac{\text{क}}{\text{२}} = \sqrt{\text{च}} \text{ स्प } \dfrac{\text{ख}}{\text{२}}$ हो तो कोज्या क का मान बताओ

कौन से चिन्ह निम्नलिखित वर्गमूलों में उचित रहेंगे ? कारण सहित बताओ।

$$\text{२ ज्या } \dfrac{\text{क}}{\text{२}} = \pm \sqrt{\text{१ − ज्या क}} \pm \sqrt{\text{१ + ज्या क}}$$

जब कि

(२७) $\dfrac{\text{क}}{\text{२}} = \text{३४०}^\circ$ (२८) $\dfrac{\text{क}}{\text{२}} = \text{१८०}^\circ$

(२९) $\text{क} = \text{४६}^\circ$ (३०) $\dfrac{\text{क}}{\text{२}} = \text{१६८०}^\circ$

(३१) यदि $\dfrac{\text{क}}{\text{२}} = \text{२३०}^\circ$ तो सिद्ध करो कि

$$\text{२ कोज्या } \dfrac{\text{क}}{\text{२}} = -\sqrt{\text{१ + ज्या क}} + \sqrt{\text{१ − ज्या क}}$$

(३२) यदि $\text{क} = \text{७८०}^\circ$ तो सिद्ध करो कि

$ज्या \frac{क}{२} + कोज्या \frac{क}{२}$ धनात्मक है

$ज्या \frac{क}{२} - कोज्या \frac{क}{२}$ ऋणात्मक है

(३३) यदि क = ५८०° हो तो सिद्ध करो कि

$$२\ ज्या \frac{क}{२} = -\sqrt{१ + ज्या\ क} - \sqrt{१ - ज्या\ क}$$

किन सीमाओं के बीच में $\frac{क}{२}$ की स्थिति होगी जब कि

(३४) $२\ ज्या \frac{क}{२} = \sqrt{१ + ज्या\ क} + \sqrt{१ - ज्या\ क}$

(३५) $२\ ज्या \frac{क}{२} = \sqrt{१ + ज्या\ क} - \sqrt{१ - ज्या\ क}$

(३६) $२\ ज्या \frac{क}{२} = -\sqrt{१ + ज्या\ क} + \sqrt{१ - ज्या\ क}$

(३७) $२\ कोज्या \frac{क}{२} = \sqrt{१ + ज्या\ क} - \sqrt{१ - ज्या\ क}$

(३८) यदि क = ३२०° हो तो सिद्ध करो कि

$$स्प \frac{क}{२} = \frac{१ - \sqrt{१ + स्प^२ क}}{स्प\ क}$$

(७८) कोण १८° और ३६° की त्रिकोणमितीय निष्पत्तियाँ

मानलो क = १८°

∴ २ क = ३६°; ३ क = ५४°

और २ क = ९०° − ३ क

ज्या २ क = ज्या (९०° − ३ क)

= कोज्या ३ क

∴ २ ज्या क कोज्या क = ४ कोज्या^{3} क − ३ कोज्या क

४ कोज्या^{3}क − २ ज्या क कोज्या क − ३ कोज्या क = ०

कोज्या क (४ कोज्या^{2} क − २ ज्या क − ३) = ०

अतः या तो कोज्या क = ० जिससे क = ९०°

या ४ कोज्या^{2}क − २ ज्या क − ३ = ०

४ ज्या^{2} क + २ ज्या क − १ = ०

$$\text{ज्या क} = \frac{\pm\sqrt{5}-1}{4}$$

चूँकि क = १८° है अतः $\sqrt{5}$ का धनात्मक चिन्ह लिया जायगा।

$$\therefore \text{ज्या } 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

$$\text{कोज्या } 18 = \sqrt{1-\text{ज्या}^2 18^\circ} = \sqrt{1-\frac{6-2\sqrt{5}}{16}}$$

$$= \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$

$$\text{कोज्या } 36^\circ = 1-2\,\text{ज्या}^2\, 18^\circ$$

$$= 1-2\left(\frac{6-2\sqrt{5}}{16}\right)$$

$$= 1-\frac{3-\sqrt{5}}{4}$$

$\therefore$ कोज्या ३६° $= \frac{\sqrt{५}+१}{४}$

(७९) ९° के कोण की त्रिकोणमितीय निष्पत्तियाँ—

चूँकि ज्या ९° और कोज्या ९° दोनों ही धनात्मक हैं, और ज्या ९° का मान कोज्या ९° के मान से छोटा है

$\therefore$ ज्या ९° + कोज्या ९° $= \sqrt{१ + \text{ज्या } १८°} = \sqrt{१ + \frac{\sqrt{५}-१}{४}}$

$$= \sqrt{\frac{३+\sqrt{५}}{४}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (१)$$

ज्या ९° − कोज्या ९° $= -\sqrt{१ - \text{ज्या } १८°} = -\sqrt{१ - \frac{\sqrt{५}-१}{४}}$

$$= -\sqrt{\frac{५-\sqrt{५}}{४}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (२)$$

$\therefore$ (१) और (२) को जोड़कर

ज्या ९° $= \frac{\sqrt{३+\sqrt{५}} - \sqrt{५-\sqrt{५}}}{४}$

(१) से (२) घटाकर

कोज्या ९° $= \frac{\sqrt{३+\sqrt{५}} + \sqrt{५-\sqrt{५}}}{४}$

(८०) ३° के कोण की त्रिकोणमितीय निष्पत्तियाँ—

ज्या ३° = ज्या (१८° − १५°)

= ज्या १८° कोज्या १५° − कोज्या १८° ज्या १५°

$= \frac{१}{१६}(\sqrt{५}-१)(\sqrt{६}+\sqrt{२}) - \frac{१}{८}(\sqrt{३}-१)$

$\left(\sqrt{५+\sqrt{५}}\right)$

उसी प्रकार

$$\text{कोज्या } ३^\circ = \frac{१}{४}(\sqrt{३}+१)\left(\sqrt{५}+\sqrt{५}\right)$$

$$+ \frac{१}{१६}(\sqrt{६}-\sqrt{२})(\sqrt{५}-१)$$

अभ्यास १४

सिद्ध करो

(१) ज्या $\frac{\pi}{१०}$ कोज्या $\frac{\pi}{५} = \frac{१}{४}$ (राजपूताना १९३८)

(२) स्प^{२} १८° + $\frac{४}{\sqrt{५}}$ ज्या ३०° = १

(३) कोज्या^{२} १८° − ज्या^{२} ६०° = $\frac{\sqrt{५}-१}{८}$

(४) ज्या^{२} २४° − ज्या^{२} ६° = $\frac{\sqrt{५}-१}{८}$

(राजपूताना १९४०)

(५) कोज्या^{२} ४८° − ज्या^{२} १२° = $\frac{\sqrt{५}+१}{८}$

(६) ज्या ७८° + ज्या ३०° + ज्या ६° = ज्या ६६° + ज्या ४२°

(७) कोज्या ६०° कोज्या ३६° कोज्या ४२° कोज्या ७८° = $\frac{१}{१६}$

(८) ४ (ज्या २४° + कोज्या ६°) = $\sqrt{३} + \sqrt{१५}$

(उत्तर प्रदेश १९३५)

(९) ज्या $\frac{\pi}{५}$ ज्या $\frac{२\pi}{५}$ ज्या $\frac{३\pi}{५}$ ज्या $\frac{४\pi}{५} = \frac{५}{१६}$

(१०) स्प ६° स्प ४२° स्प ६६° स्प ७८° − १ = ०

(११) ज्या १८° + ज्या (− १२६°) + $\frac{१}{२}$ = ०

(१२) कोज्या $\frac{\pi}{१५}$ कोज्या $\frac{२\pi}{१५}$ कोज्या $\frac{३\pi}{१५}$ कोज्या $\frac{४\pi}{१५}$

कोज्या $\frac{५\pi}{१५}$ कोज्या $\frac{६\pi}{१५}$ कोज्या $\frac{७\pi}{१५} = \frac{१}{२७}$

(१३) स्प २०° स्प ४०° स्प ८०° = स्प ६०°

अध्याय ६

त्रिकोणमितीय तादात्म्य

(Trigonometrical Identities)

(८१) दो से अधिक कोणों की त्रिकोणमितीय निष्पत्तियाँ (trigonometrical ratios) भी पिछले अध्यायों में बताये हुये ढंगों से प्राप्त की जा सकती हैं। जैसे कि

ज्या (क+ख+ग) = ज्या {(क + ख) + ग}

= ज्या (क + ख) कोज्या ग + कोज्या (क + ख) ज्या ग

= (ज्या क कोज्या ख + ज्या ख कोज्या क) कोज्या ग + (कोज्या क कोज्या ख — ज्या क ज्या ख) ज्या ग

= ज्या क कोज्या ख कोज्या ग + ज्या ख कोज्या ग कोज्या क + ज्या ग कोज्या क कोज्या ख — ज्या क ज्या ख ज्या ग

कोज्या (क+ख+ग) = कोज्या { (क + ख) + ग}

= (कोज्या क कोज्या ख — ज्या क ज्या ख) कोज्या ग — (ज्या क कोज्या ख + कोज्या क ज्या ख) ज्या ग

= कोज्या क कोज्या ख कोज्या ग — कोज्या क ज्या ख ज्या ग — कोज्या ख ज्या ग ज्या क — कोज्या ग ज्या क ज्या ख

$$\text{स्प}\ (\text{क}+\text{ख}+\text{ग}) = \frac{\text{स्प}\ (\text{क}+\text{ख}) + \text{स्प ग}}{\text{१} - \text{स्प}\ (\text{क}+\text{ख})\ \text{स्प ग}}$$

$$= \frac{\dfrac{\text{स्प क} + \text{स्प ख}}{\text{१} - \text{स्प क स्प ख}} + \text{स्प ग}}{\text{१} - \dfrac{\text{स्प क} + \text{स्प ख}}{\text{१} - \text{स्प क स्प ख}}\ \text{स्प ग}}$$

$$= \frac{\text{स्प क} + \text{स्प ख} + \text{स्प ग} - \text{स्प क स्प ख स्प ग}}{\text{१} - \text{स्प ख स्प ग} - \text{स्प ग स्प क} - \text{स्प क स्प ख}}$$

(८२) त्रिकोणमितीय तादात्म्य (Trigonometrical Identities)—जब तीन या अधिक कोणों में किसी प्रकार का सम्बन्ध (relation) दिया हुआ होता है तो उनसे बहुत से त्रिकोणमितीय तादात्म्य स्थापित हो सकते हैं। इनमें से सबसे महत्वपूर्ण तादात्म्य वे हैं जिनमें दिये हुए तीन कोण किसी त्रिभुज के कोण हों अर्थात दिये हुए तीनों कोणों का योग दो समकोण हों।

(८३) उदाहरण १—यदि क + ख + ग = π, सिद्ध करो कि

$$\text{ज्या २ क} + \text{ज्या २ ख} + \text{ज्या २ ग} = \text{४ ज्या क ज्या ख ज्या ग}$$

(कलकत्ता १६३०, ३३, ३५; पटना पूरक १६३८)

चूँकि क + ख + ग = π

$$\text{क} + \text{ख} = \pi - \text{ग}$$

इसलिए ज्या (क + ख = ज्या ग

और कोज्या (क + ख) = − कोज्या ग

$\therefore$ ज्या २ क + ज्या २ ख + ज्या २ ग

= २ ज्या (क + ख) कोज्या (क − ख) + २ ज्या ग कोज्या ग

= २ ज्या ग कोज्या (क − ख) + २ ज्या ग कोज्या ग

= २ ज्या ग { कोज्या (क − ख) + कोज्या ग }

= २ ज्या ग { कोज्या (क − ख) − कोज्या (क + ख)}

$= २$ ज्या ग . २ ज्या क ज्या ख

$= ४$ ज्या क ज्या ख ज्या ग

उदाहरण २—यदि क + ख + ग = π, सिद्ध करो कि

$$\text{कोज्या क} + \text{कोज्या ख} + \text{कोज्या ग} = १ + ४ \text{ ज्या } \frac{\text{क}}{२} \text{ ज्या } \frac{\text{ख}}{२} \text{ ज्या } \frac{\text{ग}}{२}$$

$$\text{चूँकि} \quad \text{क} + \text{ख} = \pi - \text{ग}$$

$$\frac{१}{२}\left(\text{क} + \text{ख}\right) = \frac{\pi}{२} - \frac{\text{ग}}{२}$$

$$\text{इसलिये कोज्या } \frac{१}{२}(\text{क} + \text{ख}) = \text{ज्या } \frac{\text{ग}}{२}$$

अतः कोज्या क + कोज्या ख + कोज्या ग

$$= २ \text{ कोज्या } \frac{१}{२}(\text{क} + \text{ख}) \text{ कोज्या } \frac{१}{२}(\text{क} - \text{ख}) + १ - २ \text{ ज्या}^२ \frac{\text{ग}}{२}$$

$$= २ \text{ ज्या } \frac{\text{ग}}{२} \text{ कोज्या } \frac{१}{२}(\text{क} - \text{ख}) - २ \text{ ज्या}^२ \frac{\text{ग}}{२} + १$$

$$= २ \text{ ज्या } \frac{\text{ग}}{२}\left[\text{कोज्या } \frac{१}{२}(\text{क} - \text{ख}) - \text{ज्या } \frac{\text{ग}}{२}\right] + १$$

$$= २ \text{ ज्या } \frac{\text{ग}}{२}\left[\text{कोज्या } \frac{१}{२}(\text{क} - \text{ख}) - \text{कोज्या } \frac{१}{२}(\text{क} + \text{ख})\right] + १$$

$$= २ \text{ ज्या } \frac{\text{ग}}{२} \cdot २ \text{ ज्या } \frac{\text{क}}{२} \text{ ज्या } \frac{\text{ख}}{२} + १$$

$$= १ + ४ \text{ ज्या } \frac{\text{क}}{२} \text{ ज्या } \frac{\text{ख}}{२} \text{ ज्या } \frac{\text{ग}}{२}$$

उदाहरण ३—यदि क + ख + ग = π, तो सिद्ध करो कि

$$\text{ज्या}^२ \frac{\text{क}}{२} + \text{ज्या}^२ \frac{\text{ख}}{२} + \text{ज्या}^२ \frac{\text{ग}}{२} = १ - २ \text{ ज्या } \frac{\text{क}}{२} \text{ ज्या } \frac{\text{ख}}{२} \text{ ज्या } \frac{\text{ग}}{२}$$

(राजपूताना १९४१, पटना १९३८)

चूँकि $\frac{क}{२} + \frac{ख}{२} + \frac{ग}{२} = \frac{\pi}{२}$

$$\frac{१}{२}(ख + ग) = \frac{\pi}{२} - क$$

इसलिये कोज्या $\frac{१}{२}(ख + ग) =$ ज्या क

अतः ज्या$^२ \frac{क}{२} +$ ज्या$^२ \frac{ख}{२} +$ ज्या$^२ \frac{ग}{२}$

$$= \frac{१}{२}\left(२ \text{ ज्या}^२ \frac{क}{२} + २ \text{ ज्या}^२ \frac{ख}{२} + २ \text{ ज्या}^२ \frac{ग}{२}\right)$$

$$= \frac{१}{२}\left(२ \text{ ज्या}^२ \frac{क}{२} + १ - \text{कोज्या } ख + १ - \text{कोज्या } ग\right)$$

$$= \frac{१}{२}\left\{२ \text{ ज्या}^२ \frac{क}{२} + २ - (\text{कोज्या } ख + \text{कोज्या } ग)\right\}$$

$$= \frac{१}{२}\left\{२ \text{ ज्या}^२ \frac{क}{२} + २ - २ \text{ कोज्या } \frac{१}{२}(ख + ग) \text{ कोज्या } \frac{१}{२}(ख - ग)\right\}$$

$$= \frac{१}{२}\left\{२ \text{ ज्या}^२ \frac{क}{२} + २ - २ \text{ ज्या } \frac{क}{२} \text{ कोज्या } \frac{१}{२}(ख - ग)\right\}$$

$$= १ + \text{ज्या } \frac{क}{२}\left\{\text{ज्या } \frac{क}{२} - \text{कोज्या } \frac{१}{२}(ख - ग)\right\}$$

$$= १ + \text{ज्या } \frac{क}{२}\left\{\text{कोज्या } \frac{१}{२}(ख + ग) - \text{कोज्या } \frac{१}{२}(ख - ग)\right\}$$

$$= १ + \text{ज्या } \frac{क}{२} \cdot २ \text{ ज्या } \frac{ख}{२} \text{ ज्या } \left(-\frac{\pi}{२}\right)$$

$$= १ - २ \text{ ज्या } \frac{क}{२} \text{ ज्या } \frac{ख}{२} \text{ ज्या } \frac{ग}{२}$$

उदाहरण ४—यदि क + ख = π हो तो सिद्ध करो कि

$$\text{ज्या}\frac{\text{क}}{\text{२}} + \text{ज्या}\frac{\text{ख}}{\text{२}} + \text{ज्या}\frac{\text{ग}}{\text{२}} - \text{१}$$

$$= \text{४ ज्या}\frac{\pi - \text{क}}{\text{४}}\,\text{ज्या}\frac{\text{ग} - \text{ख}}{\text{२}}\,\text{ज्या}\frac{\pi - \text{ग}}{\text{४}}$$

(उत्तर प्रदेश पूरक १६४८)

चूँकि क + ख + ग = π

$$\therefore \text{२}\pi - (\text{ख} + \text{ग}) = \pi + \text{क}$$

$$\text{४ ज्या}\frac{\pi - \text{क}}{\text{४}}\,\text{ज्या}\frac{\pi - \text{ख}}{\text{४}}\,\text{ज्या}\frac{\pi - \text{ग}}{\text{४}}$$

$$= \text{२ ज्या}\frac{\pi - \text{क}}{\text{४}} \cdot \text{२ ज्या}\frac{\pi - \text{ख}}{\text{४}}\,\text{ज्या}\frac{\pi - \text{ग}}{\text{४}}$$

$$= \text{२ ज्या}\frac{\pi - \text{क}}{\text{४}}\Bigg[\text{कोज्या}\frac{\text{ख} - \text{ग}}{\text{४}} - \text{कोज्या}\left\{\frac{\text{२}\pi - (\text{ख} + \text{ग})}{\text{४}}\right\}\Bigg]$$

$$= \text{२ ज्या}\frac{\pi - \text{क}}{\text{४}}\left[\text{कोज्या}\frac{\text{ख} - \text{ग}}{\text{४}} - \text{कोज्या}\frac{\pi + \text{क}}{\text{४}}\right]$$

$$= \text{२ ज्या}\frac{\pi - \text{क}}{\text{४}}\,\text{कोज्या}\frac{\text{ख} - \text{ग}}{\text{४}} - \text{२ ज्या}\frac{\pi - \text{क}}{\text{४}}\,\text{कोज्या}\frac{\pi + \text{क}}{\text{४}}$$

$$= \text{२ ज्या}\frac{\text{ख} + \text{ग}}{\text{४}}\,\text{कोज्या}\frac{\text{ख} - \text{ग}}{\text{४}} - \text{ज्या}\frac{\pi}{\text{२}} + \text{ज्या}\frac{\text{क}}{\text{२}}$$

$$= \text{ज्या}\frac{\text{ख}}{\text{२}} + \text{ज्या}\frac{\text{ग}}{\text{२}} - \text{१} + \text{ज्या}\frac{\text{क}}{\text{२}}$$

$$= \text{ज्या}\frac{\text{क}}{\text{२}} + \text{ज्या}\frac{\text{ख}}{\text{२}} + \text{ज्या}\frac{\text{ग}}{\text{२}} - \text{१}$$

उदाहरण ५—यदि क, ख, ग किसी त्रिभुज के कोण हों तो सिद्ध करो कि

(१) स्प क + स्प ख + स्प ग = स्प क स्प ख स्प ग.

(उत्तर प्रदेश १९४५ ककलत्ता १९३४)

(२) $\text{स्प } \frac{\text{ख}}{२} \text{स्प } \frac{\text{ग}}{२} + \text{स्प } \frac{\text{ग}}{२} \text{ प } \frac{\text{क}}{२} + \text{स्प } \frac{\text{क}}{२} \text{स्प } \frac{\text{ख}}{२} = १$

(उत्तर प्रदेश १९२७, ३३ कलकत्ता १९३६)

(१) स्प (क + ख + ग)

$$= \frac{\text{स्प क + स्प ख + स्प ग — स्प क स्प ख स्प ग}}{\text{१ — स्प ख स्प ग — स्प ग स्प क — स्प क स्प ख}}$$

$= १८०°$

$= ०$

∴ स्प क + स्प ख + स्प ग — स्प क स्प ख स्प ग = ०

अथवा स्प क + स्प ख + स्प ग = स्प क स्प ख स्प ग

(२) $\text{स्प } \frac{१}{२}(\text{क} + \text{ख} + \text{ग})$

$$= \frac{\text{स्प } \frac{\text{क}}{२} + \text{स्प } \frac{\text{ख}}{२} + \frac{\text{ग}}{२} — \text{स्प } \frac{\text{क}}{२} \text{स्प } \frac{\text{ख}}{२} \text{स्प } \frac{\text{ग}}{२}}{१ — \text{स्प } \frac{\text{ख}}{२} \text{स्प } \frac{\text{ग}}{२} — \text{स्प } \frac{\text{ग}}{२} \text{स्प } \frac{\text{क}}{२} — \text{स्प } \frac{\text{क}}{२} \text{स्प } \frac{\text{ख}}{२}}$$

$= \text{स्प } ९०°$

$= \frac{१}{०}$

$\therefore ० = १ — \text{स्प } \frac{\text{ख}}{२} \text{स्प } \frac{\text{ग}}{२} — \text{स्प } \frac{\text{ग}}{२} \text{स्प } \frac{\text{क}}{२} — \text{स्प } \frac{\text{क}}{२} \text{स्प } \frac{\text{ख}}{२}$

अथवा $\text{स्प } \frac{\text{ख}}{२} \text{स्प } \frac{\text{ग}}{२} + \text{स्प } \frac{\text{ग}}{२} \text{स्प } \frac{\text{क}}{२} + \text{स्प } \frac{\text{क}}{२} \text{स्प } \frac{\text{ख}}{२} = १$

द्वितीय प्रमाण—(१) चूँकि स्प (क + ख) = स्प (π — ग)

= — स्प ग

$$\therefore \frac{\text{स्प क} + \text{स्प ख}}{1 - \text{स्प क स्प ख}} = - \text{स्प ग}$$

$$\therefore \text{स्प क} + \text{स्प ख} + \text{स्प ग} = \text{स्प क स्प ख स्प ग}$$

$$(२)\ \text{स्प}\left(\frac{\text{क}}{2} + \frac{\text{ख}}{2}\right) = \text{स्प}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\text{ग}}{2}\right) = \text{कोस्प}\ \frac{\text{ग}}{2}$$

$$\frac{\text{स्प}\frac{\text{क}}{2} + \text{स्प}\frac{\text{ख}}{2}}{1 - \text{स्प}\frac{\text{क}}{2}\text{स्प}\frac{\text{ख}}{2}} = \frac{1}{\text{स्प}\frac{\text{ग}}{2}}$$

$$\therefore \text{स्प}\frac{\text{ख}}{2}\text{स्प}\frac{\text{ग}}{2} + \text{स्प}\frac{\text{ग}}{2}\text{स्प}\frac{\text{क}}{2} + \text{स्प}\frac{\text{क}}{2}\text{स्प}\frac{\text{ख}}{2} = 1$$

उदाहरण ६—यदि क + ख + ग = २ स, सिद्ध करो कि

$$\text{ज्या (स − क)} + \text{ज्या (स − ख)} + \text{ज्या (स − ग)} - \text{ज्या स}$$

$$= 4\ \text{ज्या}\frac{\text{क}}{2}\text{ज्या}\frac{\text{ख}}{2}\text{ज्या}\frac{\text{ग}}{2}$$

चूँकि क + ख + ग = २ स

२ स − क − ख = ग

और २ स − ग = क + ख

$$\therefore \text{ज्या (स − क)} + \text{ज्या (स − ख)} + \text{ज्या (स − ग)} - \text{ज्या स}$$

$$= 2\ \text{ज्या}\frac{1}{2}(\text{२ स − क − ख})\ \text{कोज्या}\frac{1}{2}(\text{क − ख}) +$$

$$2\ \text{कोज्या}\ \frac{1}{2}(\text{२ स − ग})\ \text{ज्या}\left(-\frac{\text{ग}}{2}\right)$$

$$= 2\ \text{ज्या}\frac{\text{ग}}{2}\ \text{कोज्या}\ \frac{1}{2}(\text{क − ख})$$

$$- 2\ \text{ज्या}\frac{\text{ग}}{2}\ \text{कोज्या}\ \frac{1}{2}(\text{क + ख})$$

$$= २ \text{ ज्या } \frac{ग}{२}\left[\text{कोज्या } \frac{१}{२}(क - ख) - \text{कोज्या } \frac{१}{२}(क + ख)\right]$$

$$= २ \text{ ज्या } \frac{ग}{२} २ \text{ ज्या } \frac{क}{२} \text{ ज्या } \frac{ख}{२}$$

$$= ४ \text{ ज्या } \frac{क}{२} \text{ ज्या } \frac{ख}{२} \text{ ज्या } \frac{ग}{२}$$

उदाहरण ७—यदि क, ख, ग, घ किसी चतुर्भुज के कोण हों तो सिद्ध करो कि

$$\text{कोज्या } क + \text{कोज्या } ख + \text{कोज्या } ग + \text{कोज्या } घ$$

$$= -४ \text{ कोज्या } \frac{क + ख}{२} \text{ कोज्या } \frac{क + ग}{२} \text{ कोज्या } \frac{क + घ}{२}$$

$$क + ख + ग + घ = २\pi$$

$$क - ख = २क + घ + ग - २\pi$$

$$\frac{क - ख}{२} = \frac{२क + घ + ग - २\pi}{२}$$

और $\frac{ग + घ}{२} = \pi - \frac{क + ख}{२}$

$$\text{कोज्या } \frac{ग + घ}{२} = -\text{कोज्या } \frac{क + ख}{२}$$

$$\text{कोज्या } क + \text{कोज्या } ख + \text{कोज्या } ग + \text{कोज्या } घ$$

$$= २ \text{ कोज्या } \frac{क + ख}{२} \text{ कोज्या } \frac{क - ख}{२} + २ \text{ कोज्या } \frac{ग + घ}{२} \text{ कोज्या } \frac{ग - घ}{२}$$

$$= २ \text{ कोज्या } \frac{क + ख}{२} \text{ कोज्या } \frac{क - ख}{२} - २ \text{ कोज्या } \frac{क + ख}{२} \text{ कोज्या } \frac{ग - घ}{२}$$

$$= २ \text{ कोज्या } \frac{क + ख}{२} \left(\text{कोज्या } \frac{क - ख}{२} - \text{कोज्या } \frac{ग - घ}{२} \right)$$

$$= २ \text{ कोज्या } \frac{क + ख}{२} \left[\text{कोज्या } \left(\frac{२ क + ग + घ}{२} \right) - \pi - \text{कोज्या } \frac{ग - घ}{२} \right]$$

$$= -२ \text{ कोज्या } \frac{क + ख}{२} \left(\text{कोज्या } \frac{२ क + ग + घ}{२} + \text{कोज्या } \frac{ग - घ}{२} \right)$$

$$= -२ \text{ कोज्या } \frac{क + ख}{२} . २ \text{ कोज्या } \frac{क + ग}{२} \text{ कोज्या } \frac{क + घ}{२}$$

$$= -४ \text{ कोज्या } \frac{क + ख}{२} \text{ कोज्या } \frac{क + ग}{२} \text{ कोज्या } \frac{क + घ}{२}$$

उदाहरण ८—यदि य + र + ल = य र ल,

सिद्ध करो कि

$$\frac{३य - य^3}{१ - ३य^2} + \frac{३र - र^3}{१ - ३र^2} + \frac{३ल - ल^3}{१ - ३ल^2} = \frac{३य - य^3}{१ - ३य^2} \cdot \frac{३र - र^3}{१ - ३र^2} \cdot \frac{३ल - ल^3}{१ - ३ल^2}$$

मान लो कि य = स्प क, र = स्प ख, ल = स्प ग

$$\therefore \text{ स्प क + स्प ख + स्प ग = स्प क स्प ख स्प ग}$$

$$\therefore \frac{\text{स्प क + स्प ख}}{\text{१ − स्प क स्प ख}} = - \text{ स्प ग}$$

$$\therefore \text{ स्प (क + ख) = स्प } (\pi - ग)$$

$$क + ख = स\pi + \pi - ग$$

$$क + ख + ग = स\pi + \pi$$

$$\therefore \frac{३य - य^3}{१ - ३य^2} + \frac{३र - र^3}{१ - ३र^2} + \frac{३ल - ल^3}{१ - ३ल^2}$$

$$= \frac{\text{३स्प क − स्प}^3 \text{ क}}{\text{१ − ३ स्प}^2 \text{ क}} + \frac{\text{३ स्प ख − स्प}^3 \text{ ख}}{\text{१ − ३ स्प}^2 \text{ ख}} + \frac{\text{३ स्प ग − स्प}^3 \text{ ग}}{\text{१ − ३ स्प}^2 \text{ ग}}$$

$$= \text{स्प ३ क + स्प ३ ख + स्प ३ ग}$$

$= \text{स्प } ३\text{क} \cdot \text{स्प } ३\text{ख} \cdot \text{स्प } ३\text{ग}$ (उदाहरण ५ की भाँति)

$$= \frac{३\text{य} - \text{य}^3}{१ - ३\text{य}^2} \cdot \frac{३\text{र} - \text{र}^3}{१ - ३\text{र}^2} \cdot \frac{३\text{ल} - \text{ल}^3}{१ - ३\text{ल}^2}$$

अभ्यास १५

यदि $\text{क} + \text{ख} + \text{ग} = \pi$ हो तो सिद्ध करो कि

(१) $\text{कोज्या } २\text{क} + \text{कोज्या } २\text{ख} + \text{कोज्या } \text{ग} + १$

$= -४ \text{ कोज्या क कोज्या ख कोज्या ग}$

(२) $\text{ज्या } ४\text{क} + \text{ज्या } ४\text{ख} + \text{ज्या } ४\text{ग}$

$= -४ \text{ ज्या } २\text{क} \text{ ज्या } २\text{ख} \text{ ज्या } २\text{ग}$

(३) $\text{ज्या } २\text{क} + \text{ज्या } २\text{ख} - \text{ज्या } २\text{ग}$

$= ४ \text{ कोज्या क कोज्या ख ज्या ग}$ (उ० प्र० १६३४)

(४) $\text{ज्या क} + \text{ज्या ख} + \text{ज्या ग} = ४ \text{ कोज्या} \frac{\text{क}}{२} \text{ कोज्या} \frac{\text{ख}}{२} \text{ कोज्या} \frac{\text{ग}}{२}$

(५) $\text{कोज्या क} - \text{ज्या ख} + \text{ज्या ग} = ४ \text{ ज्या} \frac{\text{क}}{२} \text{ कोज्या} \frac{\text{ख}}{२} \text{ ज्या} \frac{\text{ग}}{२}$

(६) $\text{कोज्या क} + \text{कोज्या ख} + \text{कोज्या ग}$

$= १ + ४ \text{ ज्या} \frac{\text{क}}{२} \text{ ज्या} \frac{\text{ख}}{२} \text{ ज्या} \frac{\text{ग}}{२}$

(पंजाब १६४२)

(७) $\text{कोज्या क} + \text{कोज्या ख} - \text{कोज्या ग} + १$

$= ४ \text{ कोज्या} \frac{\text{क}}{२} \text{ कोज्या} \frac{\text{ख}}{२} \text{ ज्या} \frac{\text{ग}}{२}$

(८) $\text{कोज्या} \frac{\text{क}}{२} + \text{कोज्या} \frac{\text{ख}}{२} + \text{कोज्या} \frac{\text{ग}}{२}$

$= ४ \text{ कोज्या} \frac{\pi - \text{क}}{४} \text{ कोज्या} \frac{\pi - \text{ख}}{४} \text{ कोज्या} \frac{\pi - \text{ग}}{४}$

$$= ४ \text{ कोज्या } \frac{ख + ग}{४} \text{ कोज्या } \frac{ग + क}{४} \text{ कोज्या } \frac{क + ख}{४}$$

(उ० प्र० १६३६)

(६) कोस्प ख कोस्प ग + कोस्प ग कोस्प क + कोस्प क कोस्प ख = १

(राजपूताना १६४१)

(१०) $\text{कोस्प } \frac{क}{२} + \text{ कोस्प } \frac{ख}{२} + \text{ कोस्प } \frac{ग}{२}$

$$= \text{ कोस्प } \frac{क}{२} \text{ कोस्प } \frac{ख}{२} \text{ कोस्प } \frac{ग}{२}$$

(दिल्ली १६४१, पंजाब १६४२, उ० प्र० १६२७, १६३४, १६३८)

(११) स्प ४ क + स्प ४ ख + स्प ४ ग = स्प ४ क स्प ४ ख स्प ४ ग

(१२) कोज्या २ क + कोज्या २ ख + ज्या २ ग

$$= ४ \text{ कोज्या ग कोज्या } \left(\frac{\pi}{४} + क\right) \text{ ज्या } \left(ख - \frac{\pi}{४}\right)$$

(१३) कोज्या २ क − कोज्या २ ख + ज्या २ ग

$$= -४ \text{ ज्या ग ज्या } \left(\frac{\pi}{४} + क\right) \text{ कोज्या } \left(\frac{\pi}{४} + ख\right)$$

(१४) $\text{कोज्या } \frac{क}{२} + \text{ कोज्या } \frac{ख}{२} - \text{ कोज्या } \frac{ग}{२}$

$$= ४ \text{ कोज्या } \frac{\pi + क}{४} \text{ कोज्या } \frac{\pi + ख}{४} \text{ कोज्या } \frac{\pi - ग}{४}$$

(राजपूताना १६४२)

(१५) ज्या क + ज्या ख + ज्या ग + १

$$= ४ \text{ कोज्या } \frac{ग}{२} \text{ कोज्या } \left(\frac{\pi}{४} - \frac{क}{२}\right) \text{ कोज्या } \left(\frac{\pi}{४} - \frac{ख}{२}\right)$$

(१६) $ज्या\left(क-\frac{\pi}{३}\right)+ज्या\left(ख-\frac{\pi}{३}\right)+ज्या\left(ग-\frac{\pi}{३}\right)$

$$=-४\ ज्या\ \tfrac{१}{२}\left(क-\frac{\pi}{३}\right)ज्या\ \tfrac{१}{२}\left(ख-\frac{\pi}{३}\right)$$

$$ज्या\ \tfrac{१}{२}\left(ग-\frac{\pi}{३}\right)$$

(१७) $ज्या^२ क+ज्या^२ ख+ज्या^२ ग$

$$=२+२\ कोज्या\ क\ कोज्या\ ख\ कोज्या\ ग$$

(उ० प्र० १६४८ राजपूताना १६४६)

(१८) $कोज्या^२ क+कोज्या^२ ख+कोज्या^२ ग$

$$=१-२\ कोज्या\ क\ कोज्या\ ख\ कोज्या\ ग$$

(उ० प्र० १६३२ कलकत्ता १६३७)

(१९) $ज्या^२ क+ज्या^२ ख-ज्या^२ ग=२\ ज्या\ क\ ज्या\ ख\ कोज्या\ ग$

(२०) $कोज्या^२ क+कोज्या^२ ख-कोज्या^२ ग$

$$=१-२\ ज्या\ क\ ज्या\ ख\ कोज्या\ ग$$

(२१) $ज्या^२\frac{क}{२}+ज्या^२\frac{ख}{२}-ज्या^२\frac{ग}{२}$

$$=१-२\ कोज्या\frac{क}{२}\ कोज्या\frac{ख}{२}\ ज्या\frac{ग}{२}$$

(२२) $ज्या(क+२ख-ग)+ज्या(२क-ख+ग)$

$$+ज्या(-क+ख+२ग)$$

$$=४\ कोज्या\left(क-\frac{ग}{२}\right)कोज्या\left(ग-\frac{ख}{२}\right)कोज्या\left(ख-\frac{क}{२}\right)$$

(२३) $ज्या(-क+ख+ग)+ज्या(क-ख+ग)$

$$+ज्या(क+ख-ग)=४\ ज्या\ क\ ज्या\ ख\ ज्या\ ग$$

(उ० प्र० १६४०)

(२४) ज्या (ख + २ ग) + ज्या (ग + २ क) + ज्या (क + २ ख)

$$= \text{४ ज्या}\ \frac{\text{ख} - \text{ग}}{\text{२}}\ \text{ज्या}\ \frac{\text{ग} - \text{क}}{\text{२}}\ \text{ज्या}\ \frac{\text{क} - \text{ख}}{\text{२}}$$

(पटना पूरक १९३७)

(२५) कोज्या (− क + ख + ग) + कोज्या (क − ख + ग)
− कोज्या (क + ख − ग) − कोज्या (क + ख + ग)
= ४ ज्या क ज्या ख कोज्या ग

(२६) (कोस्प ख + कोस्प ग) (कोस्प ग + कोस्प क)

$$(\text{कोस्प क} + \text{कोस्प ख}) = \frac{\text{१}}{\text{ज्या क ज्या ख ज्या ग}}$$

(२७)
$$\frac{\text{कोज्या क}}{\text{ज्या ख ज्या ग}} + \frac{\text{कोज्या ख}}{\text{ज्या ग ज्या क}} + \frac{\text{कोज्या ग}}{\text{ज्या क ज्या ख}} = \text{२}$$

(उ० प्र० १९३४)

(२८)
$$\frac{\text{कोस्प ख} + \text{कोस्प ग}}{\text{स्प ख} + \text{स्प ग}} + \frac{\text{कोस्प ग} + \text{कोस्प क}}{\text{स्प ग} + \text{स्प क}}$$
$$+ \frac{\text{कोस्प क} + \text{कोस्प ख}}{\text{स्प क} + \text{स्प ख}} = \text{१}$$

(२९) ज्या क (कोज्या ख + कोज्या ग) + ज्या ख (कोज्या ग + कोज्या क) + ज्या ग (कोज्या क + कोज्या ख + कोज्या ग)
= ज्या क + ज्या ख + ज्या ग

(३०) ज्या $\frac{1}{2}$ (ख + ग − क) ज्या $\frac{1}{2}$ (क + ग − ख)
+ ज्या $\frac{1}{2}$ (क + ख + ग) ज्या $\frac{1}{2}$ (क + ख − ग)
= ज्या क ज्या ख

(३१)
$$\left(\text{१} + \text{स्प}\frac{\text{क}}{\text{२}}\right)\left(\text{१} + \text{स्प}\frac{\text{ख}}{\text{२}}\right)\left(\text{१} + \text{स्प}\frac{\text{ग}}{\text{२}}\right)$$
$$= \text{२}\left(\text{१} + \text{स्प}\frac{\text{क}}{\text{४}}\ \text{स्प}\frac{\text{ख}}{\text{४}}\ \text{स्प}\frac{\text{ग}}{\text{४}}\right)$$

(राजपूताना १९४३)

(३२) यदि $\text{क} + \text{ख} + \text{ग} = \frac{\pi}{२}$, सिद्ध करो कि

$$\frac{\text{ज्या } २\text{ क} + \text{ज्या } २\text{ ख} + \text{ज्या } २\text{ ग}}{\text{ज्या } २\text{ क} + \text{ज्या } २\text{ ख} - \text{ज्या } २\text{ ग}} = \text{कोस्प क कोस्प ख}$$

(राजपूताना १९४७)

(३३) $$\frac{\left(१ - \text{स्प}\frac{\text{क}}{२}\right)\left(१ - \text{स्प}\frac{\text{ख}}{२}\right)\left(१ - \text{स्प}\frac{\text{ग}}{२}\right)}{\left(१ + \text{स्प}\frac{\text{क}}{२}\right)\left(१ + \text{स्प}\frac{\text{ख}}{२}\right)\left(१ + \text{स्प}\frac{\text{ग}}{२}\right)}$$

$$= \frac{\text{ज्या क} + \text{ज्या ख} + \text{ज्या ग} - १}{\text{कोज्या क} + \text{कोज्या ख} + \text{कोज्या ग}}$$

(३४) $\text{ज्या}^२\text{ क} + \text{ज्या}^२\text{ ख} + \text{ज्या}^२\text{ ग} + २\text{ ज्या क ज्या ख ज्या ग} = १$

(उ० प्र० १९३९)

यदि $\text{क} + \text{ख} + \text{ग} = \pi$, सिद्ध करो कि

(३५) $$\frac{\text{ज्या } २\text{ क} + \text{ज्या } २\text{ ख} - \text{ज्या } २\text{ ग}}{\text{ज्या क} + \text{ज्या ख} + \text{ज्या ग}} = \text{स्प}\frac{\text{क}}{२}\text{ स्प}\frac{\text{ख}}{२}$$

(राजपूताना १९४४, १९४७)

(३६) $$\frac{\text{ज्या } २\text{ क} + \text{ज्या } २\text{ ख} + \text{ज्या } २\text{ ग}}{\text{ज्या क} + \text{ज्या ख} + \text{ज्या ग}} = ८\text{ ज्या}\frac{\text{क}}{२}\text{ ज्या}\frac{\text{ख}}{२}\text{ ज्या}\frac{\text{ग}}{२}$$

(३७) $(\text{स्प क} + \text{स्प ख} + \text{स्प ग})(\text{कोस्प क} + \text{कोस्प ख} + \text{कोस्प ग})$

$= १ + \text{व्युको क व्युको ख व्युको ग}$

(३८) $\text{ज्या}^3\text{ क} + \text{ज्या}^3\text{ ख} + \text{ज्या}^3\text{ ग}$

$$= ३\text{ कोज्या}\frac{\text{क}}{२}\text{ कोज्या}\frac{\text{ख}}{२}\text{ कोज्या}\frac{\text{ग}}{२}$$

$$+ \text{कोज्या}\frac{३\text{ क}}{२}\text{ कोज्या}\frac{३\text{ ख}}{२}\text{ कोज्या}\frac{३\text{ ग}}{२}$$

(३९) ज्या^{४} क + ज्या^{४} ख + ज्या^{४} ग

$= \frac{१}{२}$ [३ + ४ कोज्या क कोज्या ख कोज्या ग + कोज्या २ क कोज्या २ ख कोज्या २ ग]

(४०) कोज्या^{४} क + कोज्या^{४} ख + कोज्या^{४} ग

$= \frac{१}{२}$ [१ − ४ कोज्या क कोज्या ख कोज्या ग + कोज्या २ क कोज्या २ ख कोज्या २ ग]

यदि क + ख + ग = २ स, सिद्ध करो कि

(४१) ४ ज्या स ज्या (स − क) ज्या (स − ख) ज्या (स − ग)

= १ − कोज्या^{२} क − कोज्या^{२} ख − कोज्या^{२} ग + २ कोज्या क कोज्या ख कोज्या ग

(४२) २ + २ कोज्या क कोज्या ख कोज्या ग

= कोज्या^{२} स + कोज्या^{२} (स − क) + कोज्या^{२} (स − ख) + कोज्या^{२} (स − ग)

(४३) यदि कोज्या क + कोज्या ख + कोज्या ग = ०, सिद्ध करो कि

कोज्या ३ क + कोज्या ३ ख + कोज्या ३ ग

= १२ कोज्या क कोज्या ख कोज्या ग

(४४) यदि क + ख + ग = ०, सिद्ध करो कि

(ज्या २ क + ज्या २ ख + ज्या २ ग)

= २(ज्या क + ज्या ख + ज्या ग) (१ + कोज्या क + कोज्या ख + कोज्या ग)

यदि क, ख, ग, घ किसी चतुर्भुज के कोण हों तो सिद्ध करो कि

(४५) $\dfrac{\text{स्प क + स्प ख + स्प ग + स्प घ}}{\text{कोस्प क + कोस्प ख + कोस्प ग + कोस्प घ}}$

= स्प क स्प ख स्प ग स्प घ

(४६) − ज्या क + ज्या ख − ज्या ग + ज्या घ

$= ४$ कोज्या $\dfrac{\text{क + ख}}{२}$ ज्या $\dfrac{\text{क + ग}}{२}$ कोज्या $\dfrac{\text{क + घ}}{२}$

(४७) कोज्या क + कोज्या ख + कोज्या ग + कोज्या घ

$$= ४ \text{ कोज्या } \frac{क + ख}{२} \text{ कोज्या } \frac{ख + ग}{२} \text{ कोज्या } \frac{ग + क}{२}$$

(४८) यदि य + र + ल = य र ल, तो सिद्ध करो कि

$$य(१ - र^२)(१ - ल^२) + र(१ - ल^२)(१ - य^२) + ल(१ - य^२)(१ - र^२) = ४ य र ल$$

(४९) यदि य र + र ल + ल य = १ तो सिद्ध करो कि

$$\frac{य}{१ + य^२} + \frac{र}{१ + र^२} + \frac{ल}{१ + ल^२} = \frac{२}{\sqrt{(१ + य^२)(१ + र^२)(१ + ल^२)}}$$

अध्याय १०

कोणों के व्यापक मान अथवा सार्वमान
एवं
त्रिकोणमितीय समीकरण

(General values of angles and Trigonometrical Equations)

(८४) यदि एक कोण दिया हो तो उसका अर्थ है कि त्रिकोणमितीय निष्पत्ति दी हुई है किन्तु इसका विलोम सत्य नहीं। उदाहरणार्थ कोण ४५° के दिये जाने का अर्थ है कि हमें ज्या ४५° $= \frac{१}{\sqrt{२}}$ दी हुई है किन्तु वह कोण जिसकी ज्या $\frac{१}{\sqrt{२}}$ दी हुई हो, निश्चित रूप से नहीं निकाला जा सकता क्योंकि ऐसे कोण असंख्य होते हैं जिनकी ज्या $\frac{१}{\sqrt{२}}$ हो। निम्नलिखित प्रत्येक कोण की ज्या $\frac{१}{\sqrt{२}}$ होती है

४५°, ३६०° + ४५°, ७२०° + ४५°, ...

१३५°, ३६०° + १३५°, ७२०° + १३५°, ...

− ३१५° − ३६०° − ३१५°, − ७२०° − ३१५°, ...

संक्षेप में ज्या आदि त्रिनिष्पत्तियों (trigonometrical ratios) के दिये जाने पर केवल एक कोण ज्ञात करके यह अवश्य कहा जा सकता है कि वह उन असंख्य कोणों में से एक है।

अब समस्या है कि ऐसे संक्षिप्त सूत्र निकाले जायँ जिनसे किसी दी हुई त्रिकोणमितीय निष्पत्ति के लिए सभी कोण प्रकट हो जायँ। इस प्रकार के व्यंजक (expression) को व्यापक व्यंजक (general expression) कहा जाता है और उसके मान को कोणों का व्यापक मान अथवा सार्वमान (general value) कहते हैं।

(८५) त्रिकोणमितीय समीकरण (Trigonometical Equations) वह समीकरण है जिसमें एक या अधिक अज्ञात कोण या कोणों की त्रिकोणमितीय निष्पत्तियों का समावेश हो। किसी त्रिकोणमितीय समीकरण के हल करने का अर्थ है कि अज्ञात कोण या कोणों का मान निकालना। कोणों का वह सार्वमान (General value) ही समीकरण का पूर्ण हल समझा जाता है।

(८६) उन सभी कोणों के लिये जिनकी ज्या का मान शून्य है, व्यापक व्यंजक निकालना—(To find the general expression of all the angles whose sine is zero)

उपर्युक्त व्यापक व्यंजक (General expression) निकालने का अर्थ है कि हमें समीकरण ज्या थ = ० को हल करना है। हम जानते हैं कि किसी कोण की ज्या का मान तभी शून्य होता है जब कि कोण की भ्रामक रेखा (revolving line) के एक विन्दु से आदि रेखा (initial line) पर डाले हुये लम्ब की लम्बाई शून्य हो किन्तु यह तभी होता है जब कि भ्रामक रेखा या तो अपने आदि स्थान या दूसरी ओर उसके बढ़े हुए भाग पर हो।

अतः उस दशा में थ = ०, $+\pi$, $+२\pi$, $+३\pi$;.........

किन्तु इन कोणों को क्रमशः ०, $-\pi$, -२π, -३π,......भी कहा जा सकता है।

$\therefore$ थ $= 0, \pm \pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \dots\dots$

$=$ सπ जहाँ कि स शून्य, धनात्मक (positive) अथवा ऋणात्मक (negative) पूर्ण संख्या है।

अतः थ $=$ सπ इष्ट व्यापक व्यंजक है।

(८७) उन सभी कोणों के लिये जिनकी कोज्या का मान शून्य है व्यापक-व्यंजक निकालना—(To find the general expression of all the angles whose cosine is zero)

उपर्युक्त व्यापक व्यंजक (General expression) निकालने का अर्थ है कि हमें समीकरण कोज्या थ $= 0$ को हल करना है। हम जानते हैं किसी कोण की कोज्या का मान तभी शून्य होता है जब कि कोण की भ्रामक रेखा (revolving line) के एक विन्दु से आदि रेखा (initial line) पर डाले हुये लम्ब विक्षेप (orthogonal projection) की लम्बाई शून्य हो किन्तु यह तभी हो सकता है जब कि भ्रामक रेखा आदि रेखा पर किसी भी ओर लम्ब हो।

अतः उस दशा में थ $= \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi, \frac{7}{2}\pi, \dots\dots\dots$

किन्तु इन कोणों को क्रमशः $-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, -\frac{7}{2}\pi, -\frac{5}{2}\pi \dots$

भी कहा जा सकता है।

$\therefore$ थ $= \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3}{2}\pi, \pm\frac{5}{2}\pi, \dots\dots\dots$

$= (2\text{स} + 1)\frac{\pi}{2}$ जहाँ कि स शून्य, धनात्मक अथवा ऋणात्मक पूर्ण संख्या है।

अतः थ $= (2\text{स} + 1)\frac{\pi}{2}$

(८८) उन सभी कोणों के लिये व्यापक व्यंजक जिनका स्प शून्य है, थ = स π होगा जहाँ कि स शून्य, धनात्मक अथवा ऋणात्मक पूर्ण संख्या है। यहाँ भी प्रमाण वही है जो कि ज्या के लिये ऊपर दिया गया है।

(८९) दिये हुये ज्या के सभी कोणों का व्यापक-व्यंजक निकालना—(To find the general expression of all angles having a gvien sine)

मान लो क वह लघुतम धनात्मक कोण है जिसकी ज्या दी हुई ज्या के बराबर है तथा थ कोई दूसरा कोण है जिसकी भी ज्या उसी के बराबर है।

अब ज्या थ = ज्या क

या ज्या थ − ज्या क = ०

या २ कोज्या $\frac{थ + क}{२}$ ज्या $\frac{थ - क}{२} = ०$

∴ यातो कोज्या $\frac{थ + क}{२} = ०$

या ज्या $\frac{थ - क}{२} = ०$

यदि कोज्या $\frac{थ + क}{२} = ०$

तो $\frac{थ + क}{२} = \frac{\pi}{२}$ का कोई विषम अपवर्त्य (odd multiple)

या थ = π का कोई विषम अपवर्त्य − क (१)

यदि ज्या $\frac{थ - क}{२} = ०$

तो $\frac{थ - क}{२} = \pi$ का कोई अपवर्त्य (multiple)

$$थ = २\pi \text{ का कोई अपवर्त्य} + क$$

$$= \pi \text{ का कोई सम अपवर्त्य (even multipe)} + क \quad (२)$$

अतः (१) और (२) के परिणामों को एक में मिलाकर

$$थ = स\pi + (-१)^{स} क$$ जहाँ कि स शून्य, धनात्मक, अथवा ऋणात्मक कोई सम अथवा विषम पूर्ण संख्या है।

टिप्पणी—यहाँ पर क का यह मान प्रधान मान कहा जाता है और वह कोण प्रधान कोण कहा जाता है।

ऊपर थ के ये प्राप्तमान व्युज्या थ = व्युज्या क को भी सन्तुष्ट करेंगे अतः समीकरण व्युज्या थ = व्युज्या क का हल भी यही होगा।

(६०) दिये हुये कोज्या के सभी कोणों का व्यापक व्यंजक निकालना (To find the general expression of all angles having a given cosine)

मानलो क वह लघुतम धनात्मक कोण है जिसकी कोज्या दी हुई कोज्या के बराबर है तथा थ कोई दूसरा कोण है जिसकी भी कोज्या उसी के बराबर है।

अब कोज्या थ = कोज्या क

या कोज्या थ − कोज्या क = ०

$$\text{या} \quad २ \text{ ज्या} \frac{थ + क}{२} \text{ ज्या} \frac{थ - क}{२} = ०$$

$$\therefore \text{ यातो ज्या} \frac{थ + क}{२} = ०$$

$$\text{या} \quad \text{ज्या} \frac{थ - क}{२} = ०$$

$$\text{यदि} \quad \text{ज्या} \frac{थ + क}{२} = ०$$

तो $\frac{थ + क}{२} = \pi$ का कोई अपवर्त्य (multiple)

$\therefore$ थ = २ π का कोई अपवर्त्य — क ....(१)

यदि ज्या $\frac{थ - क}{२} = ०$

तो $\frac{थ - क}{२} = \pi$ का कोई अपवर्त्य (multiple)

$\therefore$ थ = २ π का कोई अपवर्त्य + क (२)

अतः (१) और (२) के परिणामों को एक में मिलाकर

थ = २ स π $\pm$ क जहाँ कि स शून्य, धनात्मक अथवा ऋणात्मक कोई पूर्ण संख्या है।

टिप्पणी—थ के ये मान समीकरण व्युको थ = व्युको क को भी सन्तुष्ट करेंगे।

(९१) दिये हुए स्प के सभी कोणों का व्यापक व्यंजक निकालना—(To find the general expression of all angles having a given tangent)

मान लो क वह लघुतम धनात्मक कोण है जिसका स्प दिये हुए स्प के बराबर है तथा थ कोई दूसरा कोण है जिसका भी स्प उसी के बराबर है।

अब स्प थ = स्प क

$$\frac{ज्या\ थ}{कोज्या\ थ} = \frac{ज्या\ क}{कोज्या\ क}$$

ज्या थ कोज्या क − ज्या क कोज्या थ = ०

अर्थात् ज्या (थ − क) = ०

$\therefore$ थ − क = π का कोई अपवर्त्य (multiple)

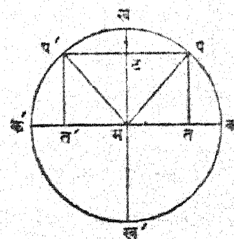
$थ = स\pi + क$, जहाँ कि स शून्य धनात्मक अथवा ऋणात्मक कोई पूर्ण संख्या है ।

टिप्पणी—थ के ये मान समीकरण कोस थ = कोस क को भी सन्तुष्ट करेंगे ।

भूमितीय विचार
(Geometrical Consideration)

(६२) दी हुई ज्या (= का) के लघुतम धनात्मक कोण की रचना एवं ऐसे कोणों के व्यापक मान—(Construction of the smallest positive angle whose sine is given and to find the general value of such angles)

मान लो क′ क और ख ख′ दो रेखायें एक दूसरे पर म विन्दु पर लम्ब हैं जिनकी धनात्मक दिशायें क्रमशः म क और म ख हैं ।



म विन्दु को केन्द्र (centre) मानकर इकाई त्रिज्या (unit radius) का एक वृत्त (circle) खींचो । म ख से [यदि का ऋणात्मक (negative) हो तो म ख′ से] म ट = का काटो और ट से म ख पर लम्ब (perpendicular) खींचो जो कि वृत्त (circle) को प विन्दु पर काटे । प म को मिलाओ ।

∠ प म क इष्ट कोण है ।

प्रमाण (Proof)—प से प क पर प त लम्ब खींचो ।

$$ज्या\ प म क = \frac{प त}{प म} = \frac{ट म}{प म} = \frac{का}{१} = का$$

व्यापक व्यंजक (General Expression)—म क′ से म त′ = म त काटो । त′ से त प के समानान्तर त′ प′ खींचो जो कि वृत्त (circle) को प′ पर काटे ।

$$\angle \text{प म त} = \angle \text{प}' \text{ म त}'$$

अतः कोण प$'$ म क $= \pi - \angle$ प$'$ म त$'$

$= \pi - \angle$ प म त $= \pi -$ क यदि

कोण प म क $=$ क हो।

जब भ्रामक रेखा (revolving line) या तो म प की अथवा म प$'$ की स्थिति में होती है तब इस प्रकार बने कोणों की ज्या (sine) का मान दिये हुये ज्या के मान (value) के बराबर होता है।

जब भ्रामक रेखा एक चक्कर लगाने के पश्चात् प म पर आती है तो इससे उत्पन्न कोण $2\pi +$ क होगा। इसी प्रकार र चक्कर लगाने के पश्चात् वह कोण 2πर $+$ क $= \pi$ का सम अपवर्त्य $+$ क ......(१) होगा जहाँ कि र शून्य, धनात्मक अथवा ऋणात्मक पूर्णाङ्क संख्या है। उसी प्रकार यदि भ्रामक रेखा र चक्कर लगाने के पश्चात् म प$'$ पर हो तो उसके द्वारा बनाये हुये कोण का मान

2πर $+$ क म प$'$ $= 2\pi$र $+ \pi -$ क

$=$ (२ र $+$ १)$\pi -$ क

$= \pi$ का विषम अपवर्त्य (odd multiple) $-$ क ......(२)

होगा जहाँ कि र शून्य, धनात्मक अथवा ऋणात्मक पूर्ण संख्या है।

अतः (१) और (२) से वह कोण π का कोई अपवर्त्य (multiple) होगा किन्तु क से पहिले धन अथवा ऋण का चिन्ह स के क्रमशः सम (even) अथवा विषम (odd) होने पर निर्भर है।

$\therefore$ वह कोण स$\pi + (-1)^{\text{स}}$ क

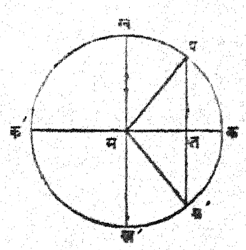
होगा जिससे (१) और (२) दोनों ही सन्तुष्ट हो जाते हैं और जहाँ कि स शून्य, धनात्मक अथवा ऋणात्मक कोई पूर्ण संख्या है।

(६३) दी हुई कोज्या (=खा) के लघुतम धनात्मक कोण की रचना एवं ऐसे कोणों के व्यापक व्यंजक—(construction of the smallest positiv angle whose Cosine

is given and to find the general value of such angles)

मान लो क′ क और ख ख′ दो रेखायें एक दूसरे पर म विन्दु पर लम्ब है जिनकी घनात्मक दिशायें क्रमशः म क और म ख हैं।

म विन्दु को केन्द्र (centre) मानकर इकाई त्रिज्या का एक वृत (circle) खींचो म क से (यदि खा ऋणात्मक हो तो म क′ से) म त = खा काटो और त से म ख के समानान्तर (parallel) त प (अथवा त प′) खींचो जो कि वृत्त को प विन्दु पर काटे।



∠ क म प अभीष्ठ कोण है।

प्रमाण (Proof)—कोज्या क म प $= \frac{\text{म त}}{\text{म प}} = \frac{\text{खा}}{१} =$ खा

व्यापक व्यंजक (General expression)—प त को बढ़ाओ जो कि वृत्त को प′ पर काटे।

त्रिभुज म प त = △म प′ त

अतः ∠ प म त = ∠प′म त

जब भ्रामक रेखा या तो म प की अथवा म′प की स्थिति में होती है (किसी अन्य स्थिति में नहीं) तो इस प्रकार बने कोणों की कोज्या दी हुई कोज्या के बराबर होती है।

यदि भ्रामक रेखा (revolving line) र चक्कर लगाने के पश्चात् म प पर हो तो उसके द्वारा बनाये हुये कोण का मान

२ π र + क .... (१)

होगा जहाँ कि र शून्य घनात्मक अथवा कोई ऋणात्मक पूर्ण संख्या है।

यदि भ्रामक रेखा र चक्कर लगाने के पश्चात् फिर वामवर्त्त चलकर म प′ पर हो तो उसके द्वारा बनाये हुये कोण का मान

$$२ \pi र - क \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (२)$$

होगा जहाँ कि र शून्य, धनात्मक अथवा कोई ऋणात्मक पूर्ण संख्या है।

अतः (१) और (२) को एक साथ मिलाने पर वह कोण

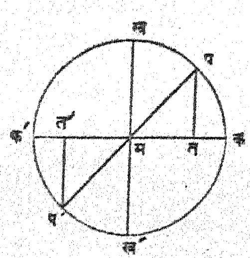
$$२ स \pi \pm क$$

होगा जहाँ कि स शून्य, धनात्मक अथवा ऋणात्मक पूर्ण संख्या है।

(६४) दिये हुये स्प (=गा) के लघुतम धनात्मक कोण की रचना एवं ऐसे कोणों के व्यापक मान—(Construction of the smallest positive angle whose tangent is given and to find the general value of such angles).

मानलो क′ क और ख ख′ दो रेखायें एक दूसरे पर म विन्दु पर लम्ब हैं जिनकी धनात्मक (positive) दिशायें क्रमशः म क और म ख है

म क से म त = इकाई काटो और त से म ख के समानान्तर खींचो और उसमे त प = गा काटो। म प को मिलाओ।



कोण प म क अभीष्ट कोण है।

प्रमाण (Proof)—

$$स्प \; प म क = \frac{पत}{मत} = \frac{गा}{१} = गा$$

व्यापक-व्यंजक (General Expression)—म को केन्द्र मानकर म प के बराबर त्रिज्या (radius) लेकर एक वृत्त खींचो। प म को बढ़ाओ जो कि वृत्त को प′ पर काटे।

प′ से म′ क पर प′ त′ लम्ब डालो

$$\triangle प म त = \triangle प′ म त′$$

अतः कोण प' म क $= \pi +$ ∠ प' म क'

$= \pi +$ ∠ प म क

$= \pi +$ क

जब भ्रामक रेखा या तो म प की अथवा म प' की स्थिति में होती है (किसी अन्य में नहीं) तो इस प्रकार के कोण का रूप दिये हुए रूप के बराबर होता है।

जब भ्रामक रेखा र चक्कर लगाने के पश्चात् म प पर होगी तब उसके द्वारा उत्पन्न कोण का मान

२ र π + क = π का सम अपवर्त्य + क ....(१)

होगा जहाँ कि र शून्य, धनात्मक अथवा ॠणात्मक पूर्ण संख्या है।

जब भ्रामक रेखा र चक्कर लगाने के पश्चात् म प' पर होगी तब उसके द्वारा बनाये हुए कोण का मान

२ र π + π + क = (२ र + १) π + क..................

= π का विषम अपवर्त्य + क.....(२)

होगा जहाँ कि र शून्य, धनात्मक अथवा ॠणात्मक पूर्ण संख्या है।

अतः (१) और (२) के परिणामों को एक में मिलाकर वह कोण

स π + क..................................(३)

होगा जहाँ कि स शून्य, धनात्मक अथवा ॠणात्मक पूर्ण संख्या है। यदि (३) में स के लिये कोई सम पूर्ण संख्या रक्खें तो (१) सन्तुष्ट हो जाता है और यदि विषम पूर्ण संख्या रक्खें तो (२) सन्तुष्ट हो जाता है।

(६५) उदाहरण १—उन सभी कोणों का व्यापक व्यंजक (General expression) बताओ जिनकी

(१) ज्या १ हो

(२) कोज्या $\frac{१}{\sqrt{२}}$ हो

(३) स्प $\frac{१}{\sqrt{३}}$ हो

(१) वह लघुतम धनात्मक कोण जिसकी ज्या एक हो $\frac{\pi}{२}$ होता है अतः व्यापक व्यंजक $स\pi + (-१)^{स}\frac{\pi}{२}$

(२) वह लघुतम धनात्मक कोण जिसकी कोज्या $\frac{१}{\sqrt{२}}$ हो, $\frac{\pi}{४}$ होता है अतः व्यापक व्यंजक $२स\pi \pm \frac{\pi}{४}$ है।

(३) वह लघुतम धनात्मक कोण जिसकी स्प $\frac{१}{\sqrt{३}}$ हो, $\frac{\pi}{६}$ होता है। अतः व्यापक व्यंजक $स\pi + \frac{\pi}{६}$ है।

उदाहरण २—हल करो

$$कोज्या^{२}\, थ - ज्या\, थ - \tfrac{१}{४} = ०$$
$$१ - ज्या^{२}\, थ - ज्या\, थ - \tfrac{१}{४} = ०$$
$$४\, ज्या^{२}\, थ + ४\, ज्या\, थ - ३ = ०$$
$$(२\, ज्या\, थ + ३)(२\, ज्या\, थ - १) = ०$$

अतः यातो $२\, ज्या\, थ + ३ = ०$

$$ज्या\, थ = -\tfrac{३}{२} \qquad (१)$$

अथवा $२\, ज्या\, थ - १ = ०$

$$ज्या\, थ = \tfrac{१}{२} \qquad (२)$$

चूँकि किसी भी कोण की ज्या का संख्यात्मक मान १ से अधिक नहीं हो सकता है अतः (१) हल के लिए निरर्थक है।

$\therefore$ (२) से ज्या थ = $\frac{१}{२}$

अर्थात् $थ = स\pi + (-१)^{स} \frac{\pi}{६}$

उदाहरण (२) हल करो :—

$$स्प\,(\pi\, कोस्प\, थ) = कोस्प\,(\pi\, स्प\, थ)$$

$$स्प\,(\pi\, कोस्प\, थ) = स्प\left(\frac{\pi}{२} - \pi\, स्प\, थ\right)$$

$$\pi\, कोस्प\, थ = स\pi + \frac{\pi}{२} - \pi\, स्प\, थ$$

$$\therefore कोस्प\, थ = स + \frac{१}{२} - स्प\, थ$$

$$स्प^{२}\, थ - \left(\frac{२स+१}{२}\right) स्प\, थ + १ = ०$$

$$अतः\; स्प\, थ = \frac{\left(\frac{२स+१}{२}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{२स+१}{२}\right)^{२} - ४}}{२}$$

$$= \frac{२स + १ \pm \sqrt{४स^{२} + ४स - १५}}{४}$$

जहाँ कि स > १ अथवा < − २

अभ्यास १६

निम्नलिखित त्रिकोणमितीय समीकरणों को हल करो—

(१) (क) ज्या थ = $\frac{१}{२}$ (ख) कोज्या थ = − १

(ग) कोज्या थ = $\frac{\sqrt{३}}{२}$ (घ) स्प थ = १

(ङ) व्युज्या थ = $\frac{२}{\sqrt{३}}$ (च) ज्या^{२} थ = $\frac{१}{२}$

(२) २ (कोज्या^{2} थ − ज्या^{2} थ) १

(३) २ ज्या^{2} थ + ३ कोज्या थ = ०

(४) २$\sqrt{३}$ कोस्प थ = व्युको थ

(५) २ ज्या ५ थ + ३ − २ व्युज्या ५ थ = ०

(६) ज्या^{2} थ − २ कोज्या थ + $\frac{१}{४}$ = ०

(राजपूताना १६४०)

(७) ज्या^{2} थ − (१ + $\sqrt{३}$) ज्या थ कोज्या थ
+ $\sqrt{३}$ कोज्या^{2} थ = ०

(८) कोस्प थ − च छ स्प थ = च − छ

(९) ३ ज्या $\frac{थ}{२}$ = २ स्प $\frac{थ}{२}$

(१०) २ कोज्या २ थ = ज्या थ + १

(११) २ व्युको थ + व्युको^{2} थ = ३

(१२) स्प^2 थ + कोस्प^2 थ = २ (उ० प्र० १६४२)

(१३) स्प थ − कोस्प थ = व्युज्या थ

(१४) २ ज्या^{2} थ + $\sqrt{३}$ कोज्या थ + १ = ०

(१५) कोज्या^{2} थ − $\frac{१}{२}$ = ज्या थ कोज्या थ

(१६) ३ (व्युको^{2} थ + स्प^2 थ) = ५

(१७) कोज्या २ थ = कोज्या^{2} थ

(१८) २ कोज्या^{2} २ थ = १ − २ ज्या थ कोज्या थ

(१९) (कोज्या थ + ज्या थ) = ४ कोज्या^{3} थ

संकेत—(कोज्या^{2} थ + ज्या^{2} थ) से वामपक्ष को गुणा करके कोज्या^{3} थ से विभाजित करो।

(२०) स्प २ थ + ३ स्प थ = ०

(२१) कोज्या ३ थ + २ कोज्या थ = ०

(२२) ज्या ६ थ = ज्या थ (लु० प्र० १६४६)

(२३) ज्या थ = ज्या $\left(\frac{\pi}{३} - \text{थ}\right)$

(२४) कोज्या ३ थ = कोज्या २ थ

(२५) ज्या च थ = ज्या छ थ

(२६) ज्या २ थ = कोज्या ३ थ

(२७) ज्या ७ थ = कोज्या (थ − क)

(२८) कोज्या च थ − ज्या छ थ = ०

(२९) स्प ५ थ = कोस्प २ थ (राजपूताना १९४२)

(३०) स्प ३ थ = कोस्प थ (उ० प्र० १९४८)

(३१) स्प २ थ = स्प $\frac{२}{\text{थ}}$

(३२) स्प^२ ३ थ स्प^२ क = १

(३३) स्प (थ + ३०°) = कोज्या (थ + ४५°)

(३४) यदि

कोज्या च थ + कोज्या छ थ = ०

सिद्ध करो कि ∠म के भिन्न भिन्न मान समान्तर श्रेणी (A.P.) बनाते हैं जिनके उभयनिष्ठ अन्तर क्रमशः $\frac{२\pi}{\text{च}+\text{छ}}$ तथा $\frac{२\pi}{\text{च} \sim \text{छ}}$ है।

(६६) योग और व्यवकलन की साध्यों का प्रयोग (Use of the Addition and Substracion Theorems)

उदाहरण १—हल करो

कोज्या थ − ज्या ३ थ = कोज्या २ थ

कोज्या थ − ज्या ३ थ − कोज्या २ थ = ०

कोज्या थ − कोज्या २ थ − ज्या ३ थ = ०

२ ज्या $\frac{३\text{ थ}}{२}$ ज्या $\frac{\text{थ}}{२}$ − २ ज्या $\frac{३\text{ थ}}{२}$ कोज्या $\frac{३\text{ थ}}{२}$ = ०

$$\therefore २ \text{ ज्या } \frac{३ \text{ थ}}{२}\left(\text{ज्या } \frac{\text{थ}}{२} - \text{कोज्या } \frac{३ \text{ थ}}{२}\right) = ०$$

अतः यातो २ ज्या $\frac{३ \text{ थ}}{२} = ०$

$$\text{थ} = \frac{२}{३} \text{ स } \pi \qquad (१)$$

या कोज्या $\frac{३ \text{ थ}}{२} = \text{ज्या } \frac{\text{थ}}{२}$

$$= \text{कोज्या } \left(\frac{\pi}{२} - \frac{\text{थ}}{२}\right)$$

$$\frac{३ \text{ थ}}{२} = २ \text{ स } \pi \pm \left(\frac{\pi}{२} - \frac{\text{थ}}{२}\right)$$

धन चिह्न लेकर

$$२ \text{ थ} = २ \text{ स } \pi + \frac{\pi}{२}$$

$$\text{थ} = \text{स } \pi + \frac{\pi}{४} \qquad (२)$$

ऋण चिह्न लेकर

$$\text{थ} = २ \text{ स } \pi - \frac{\pi}{२} \qquad (३)$$

अतः थ $= \frac{२}{३} \text{ स } \pi, \text{ स } \pi + \frac{\pi}{४}, २ \text{ स } \pi - \frac{\pi}{२}$

(६७) क कोज्या थ + ख ज्या थ = ग के रूप के समीकरण का हल—

क कोज्या थ + ख ज्या थ = ग

क = र कोज्या च , ख = र ज्या च रक्खो

$$\therefore \text{र} = (\text{क}^२ + \text{ख}^२)^{\frac{१}{२}}$$

ज्या च $= \frac{ख}{\sqrt{(क^2+ख^2)}}$ और कोज्या च $= \frac{क}{\sqrt{(क^2+ख^2)}}$

अतः दिया हुआ समीकरण

र कोज्या च कोज्या थ + र ज्या च ज्या थ = ग

र कोज्या (थ − च) = ग

कोज्या (थ − च) $= \frac{ग}{\sqrt{क^2+ख^2}}$

= कोज्या छ जहाँ छ ऐसा लघुतम धनात्मक

कोण है जिसकी कोज्या का मान $\frac{ग}{\sqrt{(क^2+ख^2)}}$ है

अतः थ − च = २ स π ± छ

थ = २ स π + च ± छ.

(९८) **उदाहरण १**—त्रिकोणमितीय समीकरण को हल करो

ज्या थ + √ ३ को ज्या थ = √ २ (उ० प्र० १९४०)

ज्या थ + √ ३ कोज्या थ = √ २

$\frac{१}{२}$ ज्या थ + $\frac{\sqrt{३}}{२}$ कोज्या थ = $\frac{१}{\sqrt{२}}$

कोज्या ६०° ज्या थ + ज्या ६०° कोज्या थ = $\frac{१}{\sqrt{२}}$

ज्या (थ + ६०°) $= \frac{१}{\sqrt{२}}$

ज्या $\left(थ + \frac{\pi}{३} \right)$ = ज्या $\frac{\pi}{४}$

$थ + \frac{\pi}{३} = स\pi + (-१)^{स}\frac{\pi}{४}$

$\therefore\ थ = \left(\frac{३स-१}{३}\right)\pi + (-१)^{स}\frac{\pi}{४}$

उदाहरण २—यदि स्प $२१^\circ\ ४८' = \cdot४$ तो

५ ज्या थ $+ २$ कोज्या थ $= ५$

को हल करो

$र^2 = २५ + ४ = २९$

$$\text{कोज्या च} = \frac{२}{\sqrt{२९}},\ \text{ज्या च} = \frac{५}{\sqrt{२९}}$$

५ ज्या थ $+ २$ कोज्या थ $= ५$

र ज्या च ज्या थ $+$ र कोज्या च कोज्या थ $= ५$

र कोज्या (थ $-$ च) $= ५$

$$\text{कोज्या } (\text{थ} - \text{च}) = \frac{५}{\sqrt{२९}}$$

किन्तु स्प $२१^\circ\ ४८' = \cdot४$

$$\text{ज्या } २१^\circ\ ४८' = \frac{२}{\sqrt{२९}} = \text{कोज्या } ६८^\circ\ १२'$$

$$\text{और कोज्या } २१^\circ\ ४८' = \frac{५}{\sqrt{२९}} = \text{ज्या } ६८^\circ १२'$$

अतः च $= ६८^\circ १२'$

अतएव कोज्या (थ $-$ च) $=$ कोज्या $२१^\circ ४८'$

$$\text{थ} - \text{च} = २\,\text{स}\,\pi \pm २१^\circ ४८'$$

$$\text{थ} = २\,\text{स}\,\pi \pm २१^\circ ४८' + ६८^\circ १२'$$

$$= २\,\text{स}\,\pi + \frac{\pi}{२}$$

अथवा

$$= २\,\text{स}\,\pi + ४६^\circ २४'$$

उदाहरण ३—हल करो—

स्प थ $+$ स्प २ थ $+$ स्प ३ थ $= ०$

(उ० प्र० १९२६, १९३१, १९४१, १९४४ राजपूताना १९४६)

$$\text{स्प } \theta + \text{स्प } २\theta + \frac{\text{स्प } \theta + \text{स्प } २\theta}{१ - \text{स्प } \theta \ \text{स्प } २\theta} = ०$$

$$(\text{स्प } \theta + \text{स्प } २\theta)\left[१ + \frac{१}{१ - \text{स्प } \theta \ \text{स्प } २\theta}\right] = ०$$

अतः यातो $\text{स्प } \theta + \text{स्प } २\theta = ०$ (१)

या $१ + \dfrac{१}{१ - \text{स्प } \theta \ \text{स्प } २\theta} = ०$ (२)

(१) से

$$\text{स्प } \theta + \frac{२ \ \text{स्प } \theta}{१ - \text{स्प}^२ \theta} = ०$$

$$\text{स्प } \theta \left(१ + \frac{२}{१ - \text{स्प}^२ \theta}\right) = ०$$

अतः यातो $\text{स्प } \theta = ०$

$$\theta = \text{स } \pi$$

या $१ + \dfrac{२}{१ - \text{स्प}^२ \theta} = ०$

$$१ - \text{स्प}^२ \theta + २ = ०$$

$$\text{स्प } \theta = \pm \sqrt{३}$$

$$\therefore \quad \theta = \text{स } \pi \pm \frac{\pi}{३}$$

(२) से

$$१ + \frac{१}{१ - \text{स्प } \theta \ \text{स्प } २\theta} = ०$$

$$१ - \text{स्प } \theta \ \text{स्प } २\theta + १ = ०$$

$$\text{स्प } \theta \ \text{स्प } २\theta = २$$

$$\frac{२ \ \text{स्प}^२ \theta}{१ - \text{स्प}^२ \theta} = २$$

$$\text{स्प}^2\, थ = १ - \text{स्प}^2\, थ$$

$$\text{स्प}\, थ = \pm \sqrt{\frac{१}{२}}$$

$$\therefore \quad थ = स\,\pi \pm \text{स्प}^{-१} \sqrt{\frac{१}{२}}$$

अतः $थ = स\,\pi$ अथवा $स\,\pi \pm \frac{\pi}{३}$, $स\,\pi \pm क$ जहाँ कि

$$\text{स्प}\, क = \frac{१}{\sqrt{२}}$$

अभ्यास १७

निम्नलिखित त्रिकोणमितीय समीकरणों को हल करो—

(१) कोज्या थ—कोज्या १ थ = ज्या ३ थ (उ० प्र० १६४७)

(२) ज्या ४ थ—ज्या २ थ = कोज्या ३ थ (उ० प्र० १६३८)

(३) ज्या ३थ + ज्या थ = ज्या २ थ (उ० प्र० १६३५)

(४) ज्या थ – ज्या २ थ = ज्या ४ थ—ज्या ३ थ

(५) कोज्या थ + कोज्या २ थ + कोज्या ३थ=० (उ० प्र० १६३६)

(६) कोज्या थ + ज्या थ = कोज्या ३थ + ज्या ३ थ

(७) ज्या थ + ज्या २ थ + ज्या ३ थ + ज्या ४ थ = ०

(उ० प्र० १६३२)

(८) ज्या २ थ + ज्या ४ थ = कोज्या थ + कोज्या ३ थ

(उ० प्र० १६३६)

(६) कोज्या थ—ज्या ३ थ = कोज्या २ थ

(१०) ज्या २ थ—कोज्या २ थ—ज्या थ + कोज्या थ = ०

(११) ज्या क + ज्या (क + थ) + ज्या (क + २थ) = ०

(१२) कोज्या क—कोज्या(क + थ) + कोज्या (क + २थ) = ०

(१३) कोज्या ३ थ कोज्या २ थ = कोज्या ७ थ कोज्या ६ थ

(१४) ज्या थ—कोज्या २ थ + कोज्या ४ थ = ०

(१५) ज्या (३ थ + क) + ज्या (३ थ − क) + ज्या (क − थ)
− ज्या (क − थ) = कोज्या क

(१६) कोज्या (३ थ + क) कोज्या (३ थ − क)
+ कोज्या (५ थ + क) कोज्या (५ थ − क) = कोज्या २ थ

(१७) व्युको थ − स्प थ = ज्या थ + कोज्या थ

(१८) ज्या ३ क = ४ ज्या क ज्या (थ + क) ज्या (थ − क)
(उ० प्र० १९३०)

(१९) व्युज्या थ + व्युको थ = ३/२

(२०) ३ ज्या २ थ + ४ कोज्या २ थ = २ (१ + कोज्या^{2} थ)
(उ० प्र० १९३७)

(२१) ज्या^{2} स थ − ज्या^{2} (स − १) थ = ज्या^{2} थ जहाँ कि स कोई पूर्ण संख्या है।

(२२) २ ज्या^{2} थ + ज्या^{2} २ थ = २ (उ० प्र० १९२८, १९४५)

(२३) स्प ३ थ = स्प २ थ + स्प थ (उ० प्र० १९३४)

(२४) कोस्प थ = ४ कोज्या २ थ + कोस्प २ थ

(२५) स्प ३ थ + स्प थ = ०

(२६) (१ − स्प थ) (१ + ज्या २ थ) = १ + स्प थ
(राजपूताना १९४४)

(२७) स्प थ + स्प २ थ + स्प ३ थ = स्प थ स्प २ थ स्प ३ थ

(२८) स्प थ + स्प ४ थ + स्प ७ थ = स्प थ स्प ४ थ स्प ७ थ
(उ० प्र० १९३२)

(२९) √३ ज्या थ − कोज्या थ = √२ (उ० प्र० १९२६)

(३०) ज्या थ + कोज्या थ = √२ (उ० प्र० १९४३, १९४६)

(३१) ३ कोज्या थ + ४ ज्या थ = ५

(३२) २४ कोज्या थ − ७ ज्या थ = ५

(३३) कोज्या थ + √३ ज्या थ = २

(३४) $\sqrt{३}$ कोज्या थ + ज्या थ = १

(३५) २ ज्या^{२} थ + ३ ज्या थ कोज्या थ + कोज्या^{२} थ = ०

(३६) ४ कोज्या^{२} थ = ३ − ज्या २ थ

(३७) व्युको^{२} थ + व्युज्या^{२} थ = १६ कोस्प थ

(३८) व्युज्या थ = कोस्प थ + $\sqrt{३}$

(३९) कोज्या २ थ = कोज्या^{२} थ

(४०) कोज्या २ थ = कोज्या थ ज्या थ

(४१) ५ कोज्या थ + २ ज्या थ = २ यदि कोस्प २१°४८′ = २½ हो

(४२) ४ कोज्या थ + ३ ज्या थ = ५ यदि स्प ५१°२१′ = १¼ हो

(४३) कोस्प ½ थ — कोस्प थ = व्युज्या $\frac{थ}{२}$

(उ० प्र० १९२६, १९४५)

(४४) कोस्प थ + कोस्प $\left(\frac{\pi}{४} + थ\right) = २$

(उ० प्र० १९३१)

(४५) कोज्या^{२} ३ थ − कोज्या^{२} २ थ = ज्या^{२} थ

(उ० प्र० पूरक १९४८)

(४६) ज्या थ + ज्या २ थ + ज्या ३ थ = १ + कोज्या थ + कोज्या २ थ

(राजपूताना १९४१)

(४७) ज्या ३ थ — २ ज्या थ — ४ कोज्या^{२} थ = ३

(उ० प्र० १९३५)

(४८) स्प थ + स्प ३ थ = २ स्प २ थ (उ० प्र० १९३७)

(४९) कोज्या ३ थ + कोज्या ५ थ + $\sqrt{२}$ (कोज्या थ + ज्या थ) कोज्या थ = ०

(राजपूताना १९४५)

(५०) व्युको $\left(\frac{\pi}{४} + थ\right)$ + व्युको $\left(\frac{\pi}{४} - थ\right) = २\sqrt{२}$

(५१) व्युको ४ थ — व्युको २ थ = २ (उ० प्र० १६३६)

(५२) कोस्प २ थ — कोस्प थ + $\frac{२}{\sqrt{३}}$ = ० (उ० प्र० १६३२)

(५३) ज्या २ थ स्प थ — स्प थ — ज्या २ थ + १ = ० (उ० प्र० १६३३)

(५४) यदि

स्प (२ य – ३ र) = कोस्प (३ य – २ र)

और स्प (२ य + ३ र) = कोस्प (३ य + २ र)

सिद्ध करो कि य और र दोनों ही १८° के अपवर्त्य (Multiple) है।

(५५) यदि क^२ + ख^२ = ग^२

सिद्ध करो कि समीकरण

क कोज्या थ + ख ज्या थ = ग मे थ के दो मान (Value) बराबर होंगे।

(५६) यदि

ज्या थ + ज्या २ थ + ज्या ३ थ = ज्या क और

कोज्या थ + कोज्या २ थ + कोज्या ३ थ = कोज्या क

सिद्ध करो कि क π का एक अपवर्त्य है। (उ० प्र० १६३३)

अध्याय ११

त्रिभुज की भुजाओं और कोणों की त्रि-निष्पत्तियों में पारस्परिक सम्बन्ध

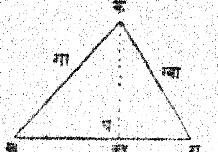
(Relations between the sides and the trigonometrical ratios of the angles of a Triangle)

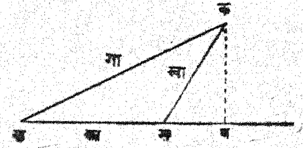
(९९) संकेत लिपि (Notation) क, ख, ग अक्षर किसी क ख ग त्रिभुज के कोणों के द्योतक होते हैं और उन कोणों के सामने की भुजायें क्रमशः का, खा, गा से प्रकट की जाती हैं।

(१००) सिद्ध करो कि किसी त्रिभुज क ख ग में

$$\frac{\text{ज्या क}}{\text{का}} = \frac{\text{ज्या ख}}{\text{खा}} = \frac{\text{ज्या ग}}{\text{गा}}$$

$$\left(\frac{\text{Sin A}}{a} = \frac{\text{Sin B}}{b} = \frac{\text{Sin C}}{c}\right)$$





त्रिभुज क ख ग के क विन्दु से सम्मुख भुजा ख ग पर (यदि आवश्यकता हो तो बढ़ाकर) क घ लम्ब डालो।

त्रिभुज क ख घ में

$$\frac{\text{क घ}}{\text{क ख}} = \text{ज्या क ख घ}$$

∴ क घ = क ख ज्या क ख घ = गा ज्या ख ....(१)

त्रिभुज क ग घ में

$\frac{\text{क घ}}{\text{क ग}}$ = ज्या क ग घ

[अधिक कोण त्रिभुज में ∠ क ग घ = १८० − ग तथा ज्या (१८० − ग) = ज्या ग]

∴ क घ = क ग ज्या क ग घ = खा ज्या ग ....(२)

अतः (१) और (२) से

गा ज्या ख = खा ज्या ग

$\frac{\text{ज्या ख}}{\text{खा}} = \frac{\text{ज्या ग}}{\text{गा}}$

ग से क ख पर लम्ब खींचकर इसी प्रकार दिखाया जा सकता है कि

$\frac{\text{ज्या ख}}{\text{खा}} = \frac{\text{ज्या क}}{\text{का}}$

$\therefore \frac{\text{ज्या क}}{\text{का}} = \frac{\text{ज्या ख}}{\text{खा}} = \frac{\text{ज्या ग}}{\text{गा}}$

यह सूत्र बहुधा ज्या-नियम (Sine Rule) कहलाता है जिसे शब्दों में इस प्रकार वर्णन किया जा सकता है—

किसी त्रिभुज के कोणों की ज्या सम्मुख भुजाओं के समानुपाती होती हैं।

(१०१) सिद्ध करो कि किसी त्रिभुज क ख ग में

का = खा कोज्या ग + गा कोज्या ख

खा = गा कोज्या क + का कोज्या ग

गा = का कोज्या ख + खा कोज्या क

$a = b \cos C + c \cos B$
$b = c \cos A + a \cos C$
$c = a \cos B + b \cos A$

सूक्त (१००) के पहिले त्रिभुज में

$$\frac{\text{ख घ}}{\text{क ख}} = \text{कोज्या क ख घ}$$

∴ ख घ = गा कोज्या ख

$$\frac{\text{ख ग}}{\text{क ग}} = \text{कोज्या क ग घ}$$

∴ घ ग = खा कोज्या ग

अतः का = ख ग = ख घ + घ ग

= गा कोज्या ख + खा कोज्या ग

$$a = c \cos B + b \cos C$$

सूक्त (१००) के दूसरे त्रिभुज में

ख घ = गा कोज्या ख

किन्तु $\frac{\text{ग घ}}{\text{क ग}} = \text{कोज्या क ग घ}$

= कोज्या (१८०° — ग) = — कोज्या ग

∴ ग घ = — खा कोज्या ग

अतः का = ख ग = ख घ — ग घ

= गा कोज्या ख — (— खा कोज्या ग)

= गा कोज्या ख + खा कोज्या ग

इसी प्रकार

खा = गा कोज्या क + का कोज्या ग

गा = का कोज्या ख + खा कोज्या क

(१०२) सिद्ध करो कि किसी त्रिभुज क ख ग में

$$\text{कोज्या ग} = \frac{\text{का}^2 + \text{खा}^2 - \text{गा}^2}{\text{२ का खा}}$$

$$\left(\text{Cos} = C\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \right)$$

सूक्त (१००) के पहिले त्रिभुज में जब कि कोण ग न्यूनकोण (acute angle) है

$$क ख^2 = ख ग^2 + ग क^2 - २ ख ग . ग घ$$

किन्तु $\frac{ग घ}{ग क} =$ कोज्या ग अर्थात्

$ग घ = खा$ कोज्या ग

$गा^2 = का^2 + खा^2 - २ का. खा.$ कोज्या ग

२ का खा कोज्या ग $= का^2 + खा^2 - गा^2$

$$\text{अतः कोज्या ग} = \frac{का^2 + खा^2 - गा^2}{२ का . खा}$$

सूक्त १०० के दूसरे चित्र में जब कि कोण ग अधिक कोण है

$$क ख^2 = ख ग^2 + ग क^2 + २ ख ग . ग घ$$

किन्तु $\frac{ग घ}{ग क} =$ कोज्या क ग घ $=$ कोज्या $(\pi - ग)$

$= -$ कोज्या ग

$\therefore$ ग घ $= -$ खा कोज्या ग

अतः $गा^2 = का^2 + खा^2 + २ का (-$ खा कोज्या ग $)$

$= का^2 + खा^2 - २$ का खा कोज्या ग

$$\therefore \text{कोज्या ग} = \frac{का^2 + खा^2 - गा^2}{२ का . खा}$$

इसी प्रकार सिद्ध किया जा सकता है कि

$$\text{कोज्या क} = \frac{खा^2 + गा^2 - का^2}{२ खा . गा}$$

$$\text{और कोज्या ख} = \frac{गा^2 + का^2 - खा^2}{२ गा . का}$$

(१०३) उदाहरण १—सिद्ध करो कि

$$\frac{का^3 + खा^3 + गा^3}{(\text{ज्या क})^3 + (\text{ज्या ख})^3 + (\text{ज्या ग})^3} = \left(\frac{गा}{\text{ज्या ग}}\right)^3$$

चूँकि $\frac{\text{ज्या क}}{\text{का}} = \frac{\text{ज्या ख}}{\text{खा}} = \frac{\text{ज्या ग}}{\text{गा}} = \text{च}$ (मान लो)

$\therefore$ ज्या क = च का

ज्या ख = च खा

ज्या ग = च गा

$$\frac{\text{का}^3 + \text{खा}^3 + \text{गा}^3}{(\text{ज्याक})^3 + (\text{ज्याख})^3 + (\text{ज्याग})^3} = \frac{\text{का}^3 + \text{खा}^3 + \text{गा}^3}{(\text{चका})^3 + (\text{चखा})^3 + (\text{चगा})^3}$$

$$= \frac{\text{का}^3 + \text{खा}^3 + \text{गा}^3}{\text{च}^3 (\text{का}^3 + \text{खा}^3 + \text{गा}^3)} = \frac{१}{\text{च}^3} = \left(\frac{\text{गा}}{\text{ज्याग}}\right)^३$$

उदाहरण २—सिद्ध करो कि

$\text{का}^२ + \text{खा}^२ + \text{गा}^२$

$= २\,(\text{खा गा कोज्या क} + \text{गा का कोज्या ख} + \text{का खा कोज्या ग})$

$२\,(\text{खा गा कोज्या क} + \text{गा का कोज्या ख} + \text{का खा कोज्या ग})$

$$= २\,\text{खा}\,.\,\text{गा}\,\frac{\text{खा}^२ + \text{गा}^२ - \text{का}^२}{२\,\text{खा गा}} + २\,\text{गा का}\,\frac{\text{गा}^२ + \text{का}^२ - \text{खा}^२}{२\,\text{गा}\,.\,\text{का}}$$

$$+ २\,\text{का}\,.\,\text{खा}\,\frac{\text{का}^२ + \text{खा}^२ - \text{गा}^२}{२\,\text{का}\,.\,\text{खा}}$$

$= \text{खा}^२ + \text{गा}^२ - \text{का}^२ + \text{गा}^२ + \text{का}^२ - \text{खा}^२ + \text{का}^२ + \text{खा}^२ - \text{गा}^२$

$= \text{का}^२ + \text{खा}^२ + \text{गा}^२$

उदाहरण ३—यदि ग=६०°, सिद्ध करो कि

$$\frac{१}{\text{का} + \text{गा}} + \frac{१}{\text{खा} + \text{गा}} = \frac{३}{\text{का} + \text{खा} + \text{गा}} \qquad (\text{पटना } १६३७)$$

हमें सिद्ध करना है कि

$$\frac{१}{\text{का} + \text{गा}} + \frac{१}{\text{खा} + \text{गा}} = \frac{३}{\text{का} + \text{खा} + \text{गा}}$$

अथवा $(\text{खा} + \text{गा})(\text{का} + \text{खा} + \text{गा}) + (\text{का} + \text{गा})(\text{का} + \text{खा} + \text{गा})$
$= ३\,(\text{का} + \text{गा})(\text{खा} + \text{गा})$

अथवा $\quad$ $खा^2 + का^2 = का \cdot खा + गा^2$

$$\frac{खा^2 + का^2 - गा^2}{२\,का \cdot खा} = \frac{१}{२}$$

किन्तु $\dfrac{खा^2 + का^2 - गा^2}{२\,का \cdot खा} = कोज्या\ ग = कोज्या\ ६०^\circ = \dfrac{१}{२}$

अतः सिद्ध हुआ

उदाहरण ४—सिद्ध करो कि

कोज्या ख (खा—गा कोज्या क) =कोज्या ग (गा—खा कोज्या क)

वाम पक्ष=कोज्या ख (गा कोज्या क + का कोज्या ग—गा कोज्या क)

=का कोज्या ख कोज्या ग

दक्षिण पक्ष=कोज्या ग (का कोज्या ख + खा कोज्या क—खा कोज्या क)

=का कोज्या ख कोज्या ग

अतः वाम पक्ष=दक्षिण पक्ष

अभ्यास १८

(१) यदि किसी त्रिभुज में का = १५, खा = ३६, गा = ३९, सिद्ध करो कि

$$कोज्या\ क = \frac{१२}{१३}$$

(२) यदि किसी त्रिभुज में $का = \dfrac{\sqrt{३} - १}{२\sqrt{२}}$, $खा = \dfrac{१}{\sqrt{२}}$, $गा = \dfrac{\sqrt{३}}{२}$ हो तो सिद्ध करो कि उस त्रिभुज के कोण १५°, ४५°, १२०° होंगे।

(३) यदि किसी त्रिभुज की भुजाएँ क्रमशः ४, ५ और ६ हों तो सिद्ध करो कि महत्तम कोण लघुतम कोण का दूना होगा।

(४) यदि किसी त्रिभुज में $कोज्या\ ग = \dfrac{१}{१४}$, $कोज्या\ क = \dfrac{१७}{२२}$ हो

तो सिद्ध करो कि का : खा : गा = ७ : ६ : ११

सिद्ध करो कि किसी त्रिभुज में

(५) $\frac{\text{का} + \text{गा}}{\text{खा}} = \frac{\text{ज्या क} + \text{ज्या ग}}{\text{ज्या ख}}$

(६) $\frac{\text{ज्या क}}{\text{का}} = \frac{\text{ज्या ख} + \text{ज्या ग}}{\text{खा} + \text{गा}} = \frac{\text{ज्या ख} - \text{ज्या ग}}{\text{खा} - \text{गा}}$

(७) का (ज्या ख − ज्या ग) + खा (ज्या ग − ज्या क) + गा (ज्या क − ज्या ख) = ० (बम्बई १६३८)

(८) $\text{ज्या}\ \frac{\text{क} - \text{ख}}{२} = \frac{\text{का} - \text{खा}}{\text{गा}} \text{कोज्या}\ \frac{\text{ग}}{२}$ (पटना १६४२)

(९) $\text{कोज्या}\ \frac{\text{ख} - \text{ग}}{२} = \frac{\text{खा} + \text{गा}}{\text{का}} \text{ज्या}\ \frac{\text{क}}{२}$

(१०) $\frac{\text{का}^२ - \text{खा}^२}{\text{खा}^२ - \text{गा}^२} = \frac{\text{ज्या}\ (\text{क} - \text{ख})\ \text{ज्या ग}}{\text{ज्या}\ (\text{ख} - \text{ग})\ \text{ज्या क}}$

(११) $\frac{\text{का} + \text{खा}}{\text{का} - \text{खा}} = \text{स्प}\ \frac{\text{क} + \text{ख}}{२}\ \text{कोस्प}\ \frac{\text{क} - \text{ख}}{२}$

(१२) $\frac{\text{का} + \text{खा} + \text{गा}}{\text{का} - \text{खा} + \text{गा}} = \text{कोस्प}\ \frac{\text{क}}{२}\ \text{कोस्प}\ \frac{\text{ग}}{२}$ (नागपुर १६४४)

(१३) $\frac{\text{ज्या}\ (\text{क} - \text{ख})}{\text{ज्या}\ (\text{क} + \text{ख})} = \frac{\text{का}^२ - \text{खा}^२}{\text{गा}^२}$ (उ० प्र० १६४१)

(१४) खा ज्या ख − गा ज्या ग = का ज्या (ख − ग) (नागपुर १६४३)

(१५) $\frac{\text{का} - \text{गा कोज्या ख}}{\text{खा} - \text{गा कोज्या क}} = \frac{\text{ज्या ख}}{\text{ज्या क}}$

(१६) $\text{खा}^२$ ज्या २ ग + $\text{गा}^२$ ज्या २ ख = २ खा गा ज्या क (उ० प्र० १६३६)

(१७) $(\text{का}^२ + \text{खा}^२ - \text{गा}^२)$ स्प ग $= (\text{का}^२ - \text{खा}^२ + \text{गा}^२)$ स्प ख

(१८) $\dfrac{\text{का}}{\text{खा}} - \dfrac{\text{खा}}{\text{का}} = \text{गा}\left(\dfrac{\text{कोज्या ख}}{\text{खा}} - \dfrac{\text{कोज्या क}}{\text{का}}\right)$

(१९) $\text{का कोज्या क} + \text{खा कोज्या ख} + \text{गा कोज्या ग}$

$= 2\ \text{का ज्या ख ज्या ग}$ (पंजाब १९२१ दिल्ली १९४०)

(२०) $\text{का व्युको क} + \text{खा व्युको ख} + \text{गा व्युको ग}$

$= \text{का व्युको क स्प ख स्प ग}$

(२१) $\dfrac{\text{का}^2\ \text{ज्या (ख}-\text{ग)}}{\text{ज्या ख} + \text{ज्या ग}} + \dfrac{\text{खा}^2\ \text{ज्या (ग}-\text{क)}}{\text{ज्या ग} + \text{ज्या क}}$

$+ \dfrac{\text{गा}^2\ \text{ज्या (क}-\text{ख)}}{\text{ज्या क} + \text{ज्या ख}} = 0$ (उ० प्र० १९३०, १९३६, राजपूताना १९४३)

(२२) $\dfrac{\text{का}^2\ \text{ज्या (ख}-\text{ग)}}{\text{ज्या क}} + \dfrac{\text{खा}^2\ \text{ज्या (ग}-\text{क)}}{\text{ज्या ख}} + \dfrac{\text{गा}^2\ \text{ज्या (क}-\text{ख)}}{\text{ज्या ग}} = 0$

(नागपुर १९२६, उ० प्र० १९२७)

(२३) $(\text{खा} + \text{गा})\ \text{कोज्या क} + (\text{गा} + \text{का})\ \text{कोज्या ख}$

$+ (\text{का} + \text{खा})\ \text{कोज्या ग} = \text{का} + \text{खा} + \text{ग}$ (मद्रास १९४४)

(२४) $\dfrac{\text{कोज्या क}}{\text{का}} + \dfrac{\text{कोज्या ख}}{\text{खा}} + \dfrac{\text{कोज्या ग}}{\text{गा}} = \dfrac{\text{का}^2 + \text{खा}^2 + \text{गा}^2}{2\ \text{का . खा . गा}}$

(आन्ध्र १९४९)

(२५) $\dfrac{\text{खा}^2}{\text{का}}\ \text{कोज्या क} + \dfrac{\text{गा}^2}{\text{खा}}\ \text{कोज्या ख} + \dfrac{\text{का}^2}{\text{गा}}\ \text{कोज्या ग}$

$= \dfrac{\text{का}^4 + \text{खा}^4 + \text{गा}^4}{2\ \text{का खा गा}}$

(२६) $\text{का} - \text{का ज्या ज्या}\dfrac{\text{क}}{2}\ \text{ज्या}\dfrac{\text{ख}-\text{ग}}{2} + \text{खा ज्या}\dfrac{\text{ख}}{2}\text{ज्या}\dfrac{\text{ग}-\text{क}}{2}$

$+ \text{गा ज्या}\dfrac{\text{ग}}{2}\ \text{ज्या}\dfrac{\text{क}-\text{ख}}{2} = 0$ (राजपूताना १९४२)

(२७) $\text{गा}^2 = (\text{का}-\text{खा})^2\ \text{कोज्या}^2\ \dfrac{\text{ग}}{2} + (\text{का} + \text{खा})^2\ \text{ज्या}^2\ \dfrac{\text{ग}}{2}$

(२८) $\text{का ज्या}(\text{ख}-\text{ग}) + \text{खा ज्या}(\text{ग}-\text{क}) + \text{गा ज्या}(\text{क}-\text{ख}) = ०$

(पटना १९३७ पूरक, कलकत्ता १९१८)

(२९) $\text{स्प क} = \dfrac{\text{का ज्या ग}}{\text{खा} - \text{का कोज्या ग}}$

(३०) $\dfrac{\text{का}-\text{खा}}{\text{गा}} = \dfrac{\text{कोज्या ख} - \text{कोज्या क}}{१ + \text{कोज्या ग}}$

(३१) $\dfrac{\text{का ज्या }(\text{ख}-\text{ग})}{\text{खा}^२ - \text{गा}^२} = \dfrac{\text{खा ज्या }(\text{ग}-\text{क})}{\text{गा}^२ - \text{का}^२} = \dfrac{\text{गा ज्या }(\text{क}-\text{ख})}{\text{का}^२ - \text{खा}^२}$

(३२) $\text{गा }(\text{ज्या}^२ \text{ क} + \text{ज्या}^२ \text{ ख})$

$= \text{ज्या ग }(\text{का ज्या क} + \text{खा ज्या ख})$

(३३) $\text{खा ज्या }\left(\dfrac{\text{ख}}{२} + \text{ग}\right) = (\text{का} + \text{गा}) \text{ ज्या } \dfrac{\text{ख}}{२}$

(३४) $\text{का}^२ (\text{कोज्या}^२ \text{ ख} - \text{कोज्या}^२ \text{ ग})$

$+ \text{खा}^२ (\text{कोज्या}^२ \text{ ग} - \text{कोज्या}^२ \text{ क})$

$+ \text{गा}^२ (\text{कोज्या}^२ \text{ क} - \text{कोज्या}^२ \text{ ख}) = ०$

(३५) $\text{का कोज्या क कोज्या २ ख} + \text{खा कोज्या ख कोज्या २ ग}$

$+ \text{गा कोज्या ग कोज्या २ क} = ०$

(३६) $(\text{खा} - \text{का}) \text{ कोज्या ग} + \text{गा }(\text{कोज्या ख} - \text{कोज्या क})$

$= \text{गा ज्या} \dfrac{\text{क} - \text{ख}}{२} \text{ व्युज्या} \dfrac{\text{क} + \text{ख}}{२}$

(३७) $\dfrac{२ \text{ कोस्प क} + \text{कोस्प ख} + \text{कोस्प ग}}{\text{कोस्प क} - \text{कोस्प ख} + \text{कोस्प ग}} = \dfrac{\text{खा}^२ + \text{गा}^२}{२ \text{ खा}^२ - \text{गा}^२}$

(बम्बई १८६४)

(३८) $(\text{खा}^२ + \text{गा}^२ - \text{का}^२) \text{ स्प क} = (\text{गा}^२ + \text{का}^२ - \text{खा}^२) \text{ स्प ख}$

$= (\text{का}^२ + \text{खा}^२ - \text{गा}^२) \text{ स्प ग}$

(३९) $\dfrac{१ + \text{कोज्या }(\text{क} - \text{ख}) \text{ कोज्या ग}}{१ + \text{कोज्या }(\text{क} - \text{ग}) \text{ कोज्या ख}} = \dfrac{\text{का}^२ + \text{खा}^२}{\text{का}^२ + \text{गा}^२}$

(उ० प्र० १९३७)

(४०) $(\text{खा}^2 - \text{गा}^2)$ कोस्प क $+ (\text{गा}^2 - \text{का}^2)$ कोस्प ख $+ (\text{का}^2 - \text{खा}^2)$ कोस्प ग $= 0$

(उ० प्र० १९२६, मद्रास १९१८)

---

(१०४) सिद्ध करो कि किसी त्रिभुज में

[१] $$\text{ज्या}\,\frac{\text{क}}{2} = \sqrt{\frac{(\text{अ} - \text{खा})(\text{अ} - \text{गा})}{\text{खा गा}}}$$

$$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)\,(s-c)}{bc}}$$

[२] $$\text{कोज्या}\,\frac{\text{क}}{2} = \sqrt{\frac{\text{अ}\,(\text{अ}-\text{का})}{\text{खा गा}}}$$

$$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{s\,(s-a)}{bc}}$$

[३] $$\text{स्प}\,\frac{\text{क}}{2} = \sqrt{\frac{(\text{अ} - \text{खा})(\text{अ} - \text{गा})}{\text{अ}\,(\text{अ} - \text{का})}}$$

$$\tan\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)\,(s-c)}{s\,(s-a)}}$$

जहाँ कि $\text{अ} = \frac{1}{2}(\text{का} + \text{खा} + \text{गा})$ = त्रिभुज की अर्द्ध परिमिति

(१) किसी त्रिभुज में

चूकि $\text{कोज्या क} = 1 - 2\,\text{ज्या}^2\frac{\text{क}}{2}$

$$\therefore\ 2\,\text{ज्या}^2\frac{\text{क}}{2} = 1 - \text{कोज्या क}$$

$$= 1 - \frac{\text{खा}^2 + \text{गा}^2 - \text{का}^2}{2\,\text{खा}\,.\,\text{गा}}$$

$$= \frac{२\,\text{खा}\,.\,\text{गा} - \text{खा}^२ - \text{गा}^२ + \text{का}^२}{२\,\text{खा}\,.\,\text{गा}}$$

$$= \frac{\text{का}^२ - (\text{खा}-\text{गा})^२}{२\,\text{खा}\,.\,\text{गा}}$$

$$= \frac{(\text{का}+\text{खा}-\text{गा})\,(\text{का}-\text{खा}+\text{गा})}{२\,\text{खा}\,.\,\text{गा}}$$

$$= \frac{(\text{का}+\text{खा}+\text{गा}-२\,\text{गा})\,(\text{का}+\text{खा}+\text{गा}-२\,\text{खा})}{२\,\text{खा}\,.\,\text{गा}}$$

$$= \frac{(२\,\text{अ}-२\,\text{गा})\,(२\,\text{अ}-२\,\text{खा})}{२\,\text{खा}\,.\,\text{गा}}$$

अतः $\text{ज्या}\,\frac{\text{क}}{२} = \sqrt{\frac{(\text{अ}-\text{खा})\,(\text{अ}-\text{गा})}{\text{खा}\,.\,\text{गा}}}$

इसी प्रकार $\text{ज्या}\,\frac{\text{ख}}{२} = \sqrt{\frac{(\text{अ}-\text{गा})\,(\text{अ}-\text{का})}{\text{गा}\,.\,\text{का}}}$

$$\text{ज्या}\,\frac{\text{ग}}{२} = \sqrt{\frac{(\text{अ}-\text{का})\,(\text{अ}-\text{खा})}{\text{का}\,.\,\text{खा}}}$$

(२) किसी त्रिभुज में $\text{कोज्या}\,\text{क} = २\,\text{कोज्या}^२\,\frac{\text{क}}{२} - १$

$$२\,\text{कोज्या}^२\,\frac{\text{क}}{२} = १ + \text{कोज्या}\,\text{क} = १ + \frac{\text{खा}^२ + \text{गा}^२ - \text{का}^२}{२\,\text{खा}\,.\,\text{गा}}$$

$$= \frac{२\,\text{खा}\,\text{गा} + \text{खा}^२ + \text{गा}^२ - \text{का}^२}{२\,\text{खा}\,.\,\text{गा}}$$

$$= \frac{(\text{खा}+\text{गा})^२ - \text{का}^२}{२\,\text{खा}\,.\,\text{गा}}$$

$$= \frac{(\text{का}+\text{खा}+\text{गा})\,(\text{खा}+\text{गा}-\text{का})}{२\,\text{खा}\,.\,\text{गा}}$$

$$= \frac{(\text{का}+\text{खा}+\text{गा})\,(\text{का}+\text{खा}+\text{गा}-२\,\text{का})}{२\,\text{खा}\,.\,\text{गा}}$$

$$= \frac{\text{२ अ} \left(\text{२ अ} - \text{२ का} \right)}{\text{२ खा . गा}}$$

$$\text{अतः कोज्या } \frac{\text{क}}{\text{२}} = \sqrt{\frac{\text{अ} \left(\text{अ} - \text{का} \right)}{\text{खा . गा}}}$$

$$\text{इसी प्रकार कोज्या } \frac{\text{ख}}{\text{२}} = \sqrt{\frac{\text{अ} \left(\text{अ} - \text{खा} \right)}{\text{का . गा}}}$$

$$\text{कोज्या } \frac{\text{ग}}{\text{२}} = \sqrt{\frac{\text{अ} \left(\text{अ} - \text{गा} \right)}{\text{का . खा}}}$$

$$(\text{३}) \text{ स्प } \frac{\text{क}}{\text{२}} = \frac{\text{ज्या} \frac{\text{क}}{\text{२}}}{\text{कोज्या } \frac{\text{क}}{\text{२}}}$$

$$= \sqrt{\frac{\left(\text{अ} - \text{खा} \right) \left(\text{अ} - \text{गा} \right)}{\text{खा गा}}} \div \sqrt{\frac{\text{अ} \left(\text{अ} - \text{का} \right)}{\text{खा गा}}}$$

$$= \sqrt{\frac{\left(\text{अ} - \text{खा} \right) \left(\text{अ} - \text{गा} \right)}{\text{अ} \left(\text{अ} - \text{का} \right)}}$$

$$\text{इसी प्रकार स्प } \frac{\text{ख}}{\text{२}} = \sqrt{\frac{\left(\text{अ} - \text{गा} \right) \left(\text{अ} - \text{का} \right)}{\text{अ} \left(\text{अ} - \text{खा} \right)}}$$

$$\text{स्प } \frac{\text{ग}}{\text{२}} = \sqrt{\frac{\left(\text{अ} - \text{का} \right) \left(\text{अ} - \text{खा} \right)}{\text{अ} \left(\text{अ} - \text{गा} \right)}}$$

(१०५) सिद्ध करो कि किसी त्रिभुज में

$$\text{ज्या क} = \frac{\text{२}}{\text{खा . गा}} \sqrt{\text{अ} [\text{अ} - \text{का}] [\text{अ} - \text{खा}] [\text{अ} - \text{गा}]}$$

$$\left(\sin A = \frac{2}{bc} \sqrt{s \, (s - a) \; s - b) \, (s - c)} \right)$$

$$\text{ज्या क} = \text{२ ज्या} \frac{\text{क}}{\text{२}} \quad \text{कोज्या} \frac{\text{क}}{\text{२}}$$

$$= 2\sqrt{\frac{(\text{अ}-\text{खा})(\text{अ}-\text{गा})}{\text{खा}\cdot\text{गा}}}\sqrt{\frac{\text{अ}(\text{अ}-\text{का})}{\text{खा}\cdot\text{गा}}}$$

$$= \frac{2}{\text{खा}\cdot\text{गा}}\sqrt{\text{अ}(\text{अ}-\text{का})(\text{अ}-\text{खा})(\text{अ}-\text{गा})}$$

यदि $\sqrt{\text{अ}(\text{अ}-\text{का})(\text{अ}-\text{खा})(\text{अ}-\text{गा})} = \triangle$ हो तो

$$\text{ज्या क} = \frac{2\triangle}{\text{खा}\cdot\text{गा}}$$

इसी प्रकार सिद्ध किया जा सकता है कि

$$\text{ज्या ख} = \frac{2\triangle}{\text{गा}\,.\,\text{का}} \text{ और } \text{ज्या ग} = \frac{2\triangle}{\text{का}\,.\,\text{खा}}$$

(१०६) सिद्ध करो कि किसी त्रिभुज में

$$\text{स्प}\frac{\text{ख}-\text{ग}}{2} = \frac{\text{खा}-\text{गा}}{\text{खा}+\text{गा}}\text{कोस्प}\frac{\text{क}}{2}$$

$$\tan\frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}$$

चूँकि किसी भी त्रिभुज में

$$\frac{\text{खा}}{\text{गा}} = \frac{\text{ज्या ख}}{\text{ज्या ग}}$$

$$\therefore \frac{\text{खा}-\text{गा}}{\text{खा}+\text{गा}} = \frac{\text{ज्या ख}-\text{ज्या ग}}{\text{ज्या ख}+\text{ज्या ग}}$$

$$= \frac{2\,\text{कोज्या}\frac{\text{ख}+\text{ग}}{2}\text{ज्या}\frac{\text{ख}-\text{ग}}{2}}{2\,\text{ज्या}\frac{\text{ख}+\text{ग}}{2}\text{कोज्या}\frac{\text{ख}-\text{ग}}{2}}$$

$$= \text{स्प}\left(\frac{\text{ख}-\text{ग}}{2}\right)\text{कोस्प}\frac{\text{ख}+\text{ग}}{2}$$

$$= \text{स्व}\left(\frac{\text{ख} - \text{ग}}{२}\right) \text{कोस्र}\left(\frac{\pi}{२} - \frac{\text{क}}{२}\right)$$

$$= \text{स्प}\ \frac{\text{ख} - \text{ग}}{२}\ \text{स्प}\ \frac{\text{क}}{२}$$

$$\text{अतः}\ \text{स्प}\ \frac{\text{ख} - \text{ग}}{२} = \frac{\text{खा} - \text{गा}}{\text{खा} + \text{गा}}\ \text{कोस्प}\ \frac{\text{क}}{२}$$

इसी प्रकार

$$\text{स्प}\ \frac{\text{क} - \text{ख}}{२} = \frac{\text{का} - \text{खा}}{\text{का} + \text{खा}}\ \text{कोस्प}\ \frac{\text{ग}}{२}$$

और

$$\text{स्प}\ \frac{\text{ग} - \text{क}}{२} = \frac{\text{गा} - \text{का}}{\text{गा} + \text{का}}\ \text{कोस्प}\ \frac{\text{ख}}{२}$$

इस परिणाम को **स्प-नियम** (tan-rule) भी कहा जाता है।

(१०७) उदाहरण १—किसी त्रिभुज में सिद्ध करो कि

$$(\text{खा} + \text{गा} - \text{का})\left(\text{कोस्प}\ \frac{\text{ख}}{२} + \text{कोस्प}\ \frac{\text{ग}}{२}\right)$$

$$= २\ \text{का}\ \text{कोस्प}\ \frac{\text{क}}{२}$$

वामपक्ष

$$= (\text{का} + \text{खा} + \text{गा} - २\ \text{का})\left(\text{कोस्प}\ \frac{\text{ख}}{२} + \text{कोस्प}\ \frac{\text{ग}}{२}\right)$$

$$= २\ (\text{अ} - \text{का})\left(\sqrt{\frac{\text{अ}\ (\text{अ} - \text{खा})}{(\text{अ} - \text{का})\ (\text{अ} - \text{गा})}} + \sqrt{\frac{\text{अ}\ (\text{अ} - \text{गा})}{(\text{अ} - \text{का})\ (\text{अ} - \text{खा})}}\right)$$

$$= २\ \sqrt{\text{अ}\ (\text{अ} - \text{का})}\left(\sqrt{\frac{\text{अ} - \text{खा}}{\text{अ} - \text{गा}}} + \sqrt{\frac{\text{अ} - \text{गा}}{\text{अ} - \text{खा}}}\right)$$

$$= २\sqrt{अ(अ - का)}\left(\frac{अ - खा + अ - गा}{\sqrt{(अ - खा)(अ - गा)}}\right)$$

$$= २\frac{\sqrt{अ(अ - का)}\,.\,का}{\sqrt{(अ - खा)(अ - गा)}}$$

$$= २\ का\ कोस्प\ \frac{क}{२}$$

उदाहरण २—यदि $का^२$, $खा^२$, $गा^२$ समान्तर श्रेणी (A.P.) में हों तो सिद्ध करो कि का व्युको क, खा व्युको ख, गा व्युको ग हरात्मक श्रेणी (H. P.) में होंगे।

दिया हुआ है कि $का^२ + गा^२ = २\ खा^२$

सिद्ध करना है कि खा व्युको ख

$$= \frac{२\ का.\ गा\ व्युको\ क.\ व्युको\ ग}{का\ व्युको\ क + गा\ व्युको\ ग}$$

अथवा $$\frac{खा}{कोज्या\ ख} = \frac{२\ का.\ गा}{का\ कोज्या\ ग + गा\ कज्या\ क}$$

$$\frac{खा}{कोज्या\ ख} = \frac{२\ का\ .\ गा}{खा}$$

$$खा^२ = २\ का.\ गा.\ कोज्या\ ख$$

$$= का^२ + गा^२ - खा^२$$

अतः $२\ खा^२ = का^२ + गा^२$ जो कि दिया हुआ है

उदाहरण ३—यदि का, खा, गा समान्तर श्रेणी (A. P.) में हों तो सिद्ध करो कि—

$$३\ स्प\ \frac{क}{२}\ स्प\ \frac{ग}{२} = १$$ (उ० प्र० १९३०)

दिया हुआ है कि $२\ खा = का + गा$

सिद्ध करना है कि—

$$३ \text{ स्प } \frac{क}{२} \text{ स्प } \frac{ग}{२} = १$$

अर्थात् $३ \sqrt{\frac{(अ - खा)(अ - गा)}{अ(अ - का)}} \cdot \sqrt{\frac{(अ - का)(अ - खा)}{अ(अ - गा)}} = १$

या: $$\frac{३(अ - खा)}{अ} = १$$

या $$२ अ - ३ खा = ०$$

का + गा = २ खा जो कि दिया हुआ है ।

उदाहरण ४—यदि का कोज्या क = खा कोज्या ख, सिद्ध करो कि त्रिभुज या तो समकोण त्रिभुज होगा अथवा समद्विबाहु ।

(उ० प्र० १९४२)

$$\text{का कोज्या } क = \text{खा कोज्या } ख$$

$$\frac{\text{कोज्या } क}{\text{कोज्या } ख} = \frac{खा}{का} = \frac{\text{ज्या } ख}{\text{ज्या } क}$$

$$\therefore \text{ ज्या } क \text{ कोज्या } क = \text{ज्या } ख \text{ कोज्या } ख$$

$$\text{ज्या } २ क = \text{ज्या } २ ख$$

$$\text{ज्या } २ क - \text{ज्या } २ ख = ०$$

$$२ \text{ कोज्या } (क + ख) \text{ ज्या } (क - ख) = ०$$

अतः या तो कोज्या (क + ख) = ० अर्थात् क + ख = ९०° जिससे कि त्रिभुज समकोण त्रिभुज है ।

अथवा ज्या (क − ख) = ० अर्थात् क − ख = ० जिससे कि त्रिभुज समद्विबाहु त्रिभुज है ।

अभ्यास १६

सिद्ध करो कि किसी त्रिभुज में

(१) $\frac{\text{अ}(\text{अ}-\text{का})}{\text{खा}.\text{गा}} - \frac{(\text{अ}-\text{खा})(\text{अ}-\text{गा})}{\text{खा}.\text{गा}} = \text{कोज्या क}$

(२) $\text{का ज्या}\left(\frac{\text{क}}{२}+\text{ख}\right) = (\text{खा}+\text{गा})\,\text{ज्या}\frac{\text{क}}{२}$

(पंजाब १६४३)

(३) $(\text{खा}-\text{गा})\,\text{कोस्प}\,\frac{\text{क}}{२} + (\text{गा}-\text{का})\,\text{कोस्प}\,\frac{\text{ख}}{२}$

$+ (\text{का}-\text{खा})\,\text{कोस्प}\,\frac{\text{ग}}{२} = ०$ (पटना १६४४)

(४) $(\text{खा}+\text{गा}-\text{का})\,\text{स्प}\,\frac{\text{क}}{२} = (\text{गा}+\text{का}-\text{खा})\,\text{स्प}\frac{\text{ख}}{२}$

$= (\text{का}+\text{खा}-\text{गा})\,\text{स्प}\,\frac{\text{ग}}{२}$ (नागपुर १६४०)

(५) $(\text{अ}-\text{का})\,\text{स्प}\,\frac{\text{क}}{२} = (\text{अ}-\text{खा})\,\text{स्प}\frac{\text{ख}}{२}$

$= (\text{अ}-\text{गा})\,\text{स्प}\frac{\text{ग}}{२}$

(६) $\frac{\text{खा}-\text{गा}}{\text{का}}\,\text{कोज्या}^२\,\frac{\text{क}}{२} + \frac{\text{गा}-\text{का}}{\text{खा}}\,\text{कोज्या}^२\,\frac{\text{ख}}{२}$

$+ \frac{\text{का}-\text{खा}}{\text{गा}}\,\text{कोज्या}^२\frac{\text{ग}}{२} = ०$

(७) $\text{खा}.\text{गा कोज्या}^२\,\frac{\text{क}}{२} + \text{गा}.\text{का कोज्या}^२\,\frac{\text{ख}}{२}$

$+ \text{का}.\text{खा कोज्या}^२\,\frac{\text{ग}}{२} = \text{अ}^२$

(८) $(\text{का}+\text{खा}+\text{गा})\left(\text{स्प}\,\frac{\text{क}}{२} + \text{स्प}\,\frac{\text{ख}}{२}\right)$

$$= २ \text{ गा कोस्प } \frac{\text{ग}}{२} \quad (\text{उ० प्र० १९३५})$$

$$(९)\ \text{खा कोज्या}^२ \frac{\text{ग}}{२} + \text{गा कोज्या}^२ \frac{\text{ख}}{२}$$

$$= \text{गा कोज्या}^२ \frac{\text{क}}{२} + \text{का कोज्या}^२ \frac{\text{ग}}{२}$$

$$= \text{का कोज्या}^२ \frac{\text{ख}}{२} + \text{खा कोज्या}^२ \frac{\text{क}}{२} = \text{अ}$$

(बम्बई १८९५, कलकत्ता १८६६, १८८६)

$$(१०)\ १ - \text{स्प } \frac{\text{क}}{२} \text{ स्प} \frac{\text{ख}}{२} = \frac{२ \text{ गा}}{\text{का} + \text{खा} + \text{गा}}$$

$$(११)\ (\text{खा} + \text{गा} - \text{का})\ \text{ज्या} \frac{\text{क}}{२} = २ \text{ का ज्या} \frac{\text{ख}}{२} \text{ ज्या} \frac{\text{ग}}{२}$$

$$(१२)\ \frac{\text{कोस्प } \frac{\text{ग}}{२} - \text{कोस्प } \frac{\text{ख}}{२}}{\text{कोस्प } \frac{\text{ग}}{२} + \text{कोस्प } \frac{\text{ख}}{२}} = \frac{\text{खा} - \text{गा}}{\text{का}}$$

$$(१३)\ \frac{\text{गा}}{\text{कोस्प } \frac{\text{क}}{२} + \text{कोस्प } \frac{\text{ख}}{२}} = \frac{\text{का खा ज्या ग}}{\text{का} + \text{खा} + \text{गा}}$$

$$(१४)\ \text{का} = (\text{खा} + \text{गा}) \frac{\text{ज्या} \frac{\text{क}}{२}}{\text{कोज्या } \frac{१}{२} (\text{ख} - \text{ग})}$$

$$= \frac{(\text{खा} - \text{गा})\ \text{कोज्या} \frac{\text{क}}{२}}{\text{ज्या } \frac{१}{२} (\text{ख} - \text{ग})}$$

(१५) गा = (का − खा) व्युकोज्या थ जहाँ कि स्प थ

$$= \frac{२\sqrt{\text{का खा}}}{\text{का} - \text{खा}} \text{ ज्या } \frac{\text{ग}}{२}$$

(१६) $२\left(\text{का ज्या}^२ \frac{\text{ग}}{२} + \text{गा ज्या}^२ \frac{\text{क}}{२}\right) = \text{गा} + \text{का} - \text{खा}$

(पंजाब १६४२)

(१७) $$\frac{\text{कोज्या क}}{\text{गा कोज्या ख} + \text{खा कोज्या ग}} + \frac{\text{कोज्या ख}}{\text{का कोज्या ग} + \text{गा कोज्या क}}$$

$$+ \frac{\text{कोज्या ग}}{\text{खा कोज्या क} + \text{का कोज्या ख}} = \frac{\text{का}^२ + \text{खा}^२ + \text{गा}^२}{२ \text{ का. खा. गा}}$$

(१८) $$\frac{\text{स्प } \frac{\text{क}}{२}}{(\text{का} - \text{खा}) \; (\text{का} - \text{गा})} + \frac{\text{स्प } \frac{\text{ख}}{२}}{(\text{खा} - \text{गा}) \; (\text{खा} - \text{का})}$$

$$+ \frac{\text{स्प } \frac{\text{ग}}{२}}{(\text{गा} - \text{का}) \; (\text{गा} - \text{खा})} = \frac{१}{\triangle}$$ (उ० प्र० १६३३)

(१६) $\frac{\text{खा}^२ - \text{गा}^२}{\text{का}^२} \text{ ज्या } २ \text{ क} + \frac{\text{गा}^२ - \text{का}^२}{\text{खा}^२} \text{ ज्या } २ \text{ ख}$

$$+ \frac{\text{का}^२ - \text{खा}^२}{\text{गा}^२} \text{ ज्या } २ \text{ ग} = ०$$ (उ० प्र० १६४६)

(२०) $(\text{का} + \text{खा} + \text{गा})^२ \; (\text{कोस्प क} + \text{कोस्प ख} + \text{कोस्प ग})$

$$= (\text{का}^२ + \text{खा}^२ + \text{गा}^२) \left(\text{कोस्प } \frac{\text{क}}{२} + \text{कोस्प } \frac{\text{ख}}{२} + \text{कोस्प } \frac{\text{ग}}{२}\right)$$

(२१) $\text{का}^3 \text{ कोज्या } (\text{ख} - \text{ग}) + \text{खा}^3 \text{ कोज्या } (\text{ग} - \text{क})$

$$+ \text{गा}^3 \text{ कोज्या } (\text{क} - \text{ख}) = ३ \text{ का. खा. गा}$$

(२२) किसी त्रिभुज में यदि गा (का + खा) कोज्या $\frac{\text{ख}}{२}$

$=$ खा (का + गा) कोज्या $\frac{ग}{२}$ हो तो सिद्ध करो कि त्रिभुज समद्विबाहु है।

(२३) यदि खा + गा = ३ का हो तो सिद्ध करो कि

कोस्प $\frac{ख}{२}$ कोस्प $\frac{ग}{२} = २$ (उ० प्र० १६३२)

(२४) यदि किसी त्रिभुज में गा भुजा का द्विभाजक (bisector) खा भुजा पर लम्ब हो तो सिद्ध करो कि २ स्प क + स्प ग = ०

(२५) यदि (का^{२} + खा^{२}) ज्या (क − ख) = (का^{२} − खा^{२}) ज्या (क + ख) हो तो सिद्ध करो कि त्रिभुज यातो समकोण त्रिभुज होगा या समद्विबाहु।

(२६) यदि कोस्प क + कोस्प ख + कोस्प ग = √३ सिद्ध करो कि त्रिभुज समत्रिबाहु होगा।

(२७) यदि किसी समकोण त्रिभुज में कोण ग समकोण हो तो सिद्ध करो कि (खा + गा) स्प $\frac{क}{२}$ = का

(२८) यदि (का^{२} + खा^{२}) कोज्या २ क = खा^{२} − का^{२}, सिद्ध करो कि वह त्रिभुज समकोण त्रिभुज होगा।

(२९) यदि किसी त्रिभुज में कोज्या^{२} क + कोज्या^{२} ख + कोज्या^{२} ग = १ हो तो सिद्ध करो कि वह त्रिभुज समकोण त्रिभुज होगा।

(३०) यदि ज्या २ ख + ज्या २ ग = ज्या २ क, सिद्ध करो कि या तो ख = ६०° या ग = ६०°

(३१) यदि किसी त्रिभुज में का स्प क + खा स्प ख = (का + खा) स्प $\frac{क + ख}{२}$ सिद्ध करो कि वह समद्विबाहु त्रिभुज होगा।

(३२) यदि किसी त्रिभुज में क = ६०° हो तो सिद्ध करो कि

$$\text{खा} + \text{गा} = २ \text{ का कोज्या } \frac{\text{ख} - \text{ग}}{२}$$ (कलकत्ता १९५५)

(३३) यदि किसी त्रिभुज में स्प $\frac{\text{क}}{२} = \frac{५}{६}$ और स्प $\frac{\text{ख}}{२} = \frac{२०}{३७}$ हो

तो सिद्ध करो कि त्रिभुज की भुजायें समान्तर श्रेणी (A. P.) में होंगी। (नागपुर १९४२)

(३४) यदि एक त्रिभुज की भुजायें समान्तर श्रेणी (A.P.) में हों तो सिद्ध करो कि उसके अर्द्ध कोणों के कोस्प भी समान्तर श्रेणी में होंगे।

(३५) यदि का, खा, गा हरात्मक (H.P.) श्रेणी में हो तो सिद्ध करो कि ज्या² $\frac{\text{क}}{२}$, ज्या² $\frac{\text{ख}}{२}$, ज्या² $\frac{\text{ग}}{२}$ भी हरात्मक श्रेणी में होंगे।

(३६) सिद्ध करो कि यदि किसी त्रिभुज की भुजाओं के वर्ग समान्तर श्रेणी (A.P.) में हों तो उसके कोणों के स्प हरात्मक (H.P.) श्रेणी में होंगे।

(३७) यदि कोज्या क + २ कोज्या ख + कोज्या ग = २ तो सिद्ध करो कि क ख ग त्रिभुज की भुजायें समान्तर श्रेणी (A.P.) में होंगी।

(३८) किसी त्रिभुज की भुजायें समान्तर श्रेणी (A.P.) में हैं, तो सिद्ध करो कि उसका क्षेत्रफल

$$\frac{\text{खा}}{४}\sqrt{३ (३ \text{ खा} - २ \text{ का}) (२ \text{ का} - \text{खा})}$$ होगा।

(३९) किसी त्रिभुज की भुजायें स० श्रे० में हैं, सिद्ध करो कि

$$\text{स्प } \frac{\text{क}}{२} + \text{स्प } \frac{\text{ग}}{२} = \frac{२}{३} \text{ कोस्प } \frac{\text{ख}}{२}$$

(४०) यदि का, खा, गा समान्तर श्रेणी (A.P.) में हों तो सिद्ध करो कि कोज्या क कोस्प $\frac{क}{२}$, कोज्या खकोस्प $\frac{ख}{२}$, कोज्या ग कोस्प $\frac{ग}{२}$ भी समान्तर श्रेणी (A.P.) में होंगे।

(४१) यदि का^{२}, खा,^{२} गा^{२} समान्तर श्रेणी मे हों तो सिद्ध करो कि कोस्प क, कोस्प ख, कोस्प ग भी समान्तर श्रेणी (A.P.) में होंगे

(उ० प्र० १६४३, राजपूताना १६४३)

(४२) यदि $\frac{ज्या\ क}{ज्या ग} = \frac{ज्या\ (क—ख)}{ज्या\ (ख—ग)}$ सिद्ध करो कि का^{२},खा^{२}, गा^{२} समान्तर श्रेणी (A.P.) में होंगे।

(४३) यदि का कोज्या^{२} $\frac{ग}{२}$ + गा कोज्या^{२} $\frac{क}{२} = \frac{३}{२}$ खा, सिद्ध करो कि त्रिभुज की भुजायें समान्तर श्रेणी (A.P.) में हैं।

(राजपूताना १६४७)

(४४) यदि (१—कोज्या क), (१—कोज्या ख), (१—कोज्या ग) हरात्मक श्रेणी (H.P) में हों तो सिद्ध करो कि ज्या क, ज्या ख, ज्याग, भी हरात्मक श्रेणी में होंगे। (बम्बई १६०४)

(४५) किसी त्रिभुज की तीनों भुजायें स० श्रे० में हैं और उसका महत्तम कोण लघुतम कोण से एक समकोण बड़ा है। सिद्ध करो कि भुजायें $\sqrt{७}+१ : \sqrt{७} : \sqrt{७}-१$ के अनुपात में हैं।

(४६) यदि किसी त्रिभुज की भुजायें समान्तर श्रेणी में हों और क लघुतम एवं ग महत्तम कोण हो तो सिद्ध करो कि

४ (१—कोज्या ग) (१—कोज्या क) = कोज्या क + कोज्या ग

(४७) यदि एक त्रिभुज की भुजायें २य + ३, य^२ + ३य + ३, य^२ + २य हो तो सिद्ध करो कि उसका महत्तम कोण १२०° होगा।

(४८) क ख ग त्रिभुज की क ख भुजा में प कोई ऐसा विन्दु है कि क प : प ख = म : न और यदि क प ग कोण थ हो तो सिद्ध करो कि

(म + न) कोस्प थ = न कोस्प क − म कोस्प ख

(उ० प्र० १६४६, १६५०)

(४६) यदि किसी समकोण त्रिभुज का कर्ण उस सरल रेखा से य, र खण्डों में विभक्त किया जाय जो कि समकोण को अर्धविभाजित करती है और यदि ट = न्यून कोणों के अन्तर के आधे का स्प, तो सिद्ध करो कि (कलकत्ता १८७८)

य : र = १ + ट : १ − ट

(५०) किसी समत्रिबाहु त्रिभुज क ख ग के भीतर एक विन्दु प है, सिद्ध करो कि

$$\text{कोज्या}\,(\text{ख प ग} - ६०^\circ) = \frac{\text{ख प}^२ + \text{ग प}^२ - \text{क प}^२}{२\,\text{ख प}\,.\,\text{प ग}}$$

(मद्रास १६०३)

(५१) सिद्ध करो कि

$$\frac{२\,\text{का खा गा}}{\text{का} + \text{खा} + \text{गा}}\,\text{कोज्या}\,\frac{\text{क}}{२}\,\text{कोज्या}\,\frac{\text{ख}}{२}\,\text{कोज्या}\,\frac{\text{ग}}{२} = \triangle$$

(उ० प्र० १६२८)

(५२) किसी त्रिभुज क ख ग में प विन्दु से ग क, ग ख भुजाओं पर डाले हुये लम्बों की लम्बाई क्रमशः प′, फ′ हो तो सिद्ध करो कि

$$\text{ग प}^२ = (\text{प}'^२ + २\,\text{प}'\,\text{फ}'\,\text{कोज्या ग} + \text{फ}'^२)\,\text{व्युज्या}^२\,\text{ग}$$

अध्याय १२

लघुगणक एवं उनके प्रयोग

(Logarithms and their Applications)

(१०८) परिभाषा—यदि $क^{य}$ = न हो तो य को क आधार पर न का लघुगणक (logarithm) कहते हैं जिसे कि संक्षेप में $य = लघु_{क}$ न से सूचित किया जाता है और शब्दों में इस प्रकार कहा जा सकता है:—

"एक दिये हुये आधार पर किसी राशि का लघुगणक उस घात (power) का घाताङ्क (index) होता है जिसे कि आधार पर रख कर दी हुई राशि प्राप्त होती है।"

उदाहरण—

चूँकि $२^{३}$ = ८, अतः आधार २ पर ८ का लघुगणक ३ है

चूँकि $५^{४}$ = ६२५, अतः आधार ५ पर ६२५ का लघुगणक ४ है

चूँकि $१०^{५}$ = १०००००, अतः आधार १० पर १००००० का लघुगणक ५ है

यदि $य^{र}$ = ल हो तो आधार य पर ल का लघुगणक र है।

उपर्युक्त उदाहरणों से प्रकट है कि लघुगणक (logarithm) घाताङ्क (index) का ही दूसरा नाम है। लम्बे-लम्बे गुणा एवं भागों को सरल क्रिया में बदलने के लिये इसका प्रयोग निकाला गया था जैसा कि आगे प्रगट हो जायगा।

(१०९) बीज गणित (Algebra) में घाताङ्क के नियमों (Rule of Index) से हम जानते हैं कि

(१) $क^{म} \times क^{न} = क^{म+न}$

(२) $क^{म} \div क^{न} = क^{म - न}$

(३) $\left(क^{म}\right)^{न} = क^{म न}$

इनके संगत (corresonding) लघुगणक के भी तीन मुख्य नियम हैं—

(१) $लघु_{क} (म\ न) = लघु_{क}\ म + लघु_{क}\ न$

$$\log_a (M N) = \log_a M + \log_a N$$

(२) $लघु_{क} \left(\frac{म}{न}\right) = लघु_{क}\ म - लघु_{क}\ न$

$$\log_a \left(\frac{M}{N}\right) = \log_a M - \log_a N$$

(३) $लघु_{क}\ म^{न} = न\ लघु_{क}\ म$

$$\log_a M^N = N \log_a M$$

(११०) सिद्ध करो कि

$$लघु_{क} (म\ न) = लघु_{क}\ म + लघु_{क}\ न$$ **अर्थात्**

"दो राशियों के गुणनफल का लघुगणक उन राशियों के उसी आधार के लघुगणकों के योगफल के बराबर होता है।"

मान लो कि $य = लघु_{क}\ म$, $र = लघु_{क}\ न$

अतः $क^{य} = म$, $क^{र} = न$

$\therefore$ म न = $क^{य} क^{र}$ = $क^{य+र}$

अतः $लघु_{क}$(म न) = य + र (परिभाषा से)

अथवा $लघु_{क}$(म न) = $लघु_{क}$म + $लघु_{क}$न

इसी प्रकार सिद्ध कर सकते हैं कि

$लघु_{क}$ (म न प) = $लघु_{क}$म ÷ $लघु_{क}$न + $लघु_{क}$प

(१११) सिद्ध करो कि

$$लघु_{क} \left(\frac{म}{न}\right) = लघु_{क}\, म - लघु_{क}\, न$$ अर्थात्

"दो राशियों की लब्धि का लघुगणक उन राशियों के उसी आधार के लघुगणकों के अन्तर के बराबर होता है।"

मानलो कि य = $लघु_{क}$म , र = $लघु_{क}$न

$\therefore$ $क^{य}$ = म , $क^{र}$ = न

$$\frac{म}{न} = \frac{क^{य}}{क^{र}} = क^{य-र}$$

अतएव $लघु_{क}\left(\frac{म}{न}\right)$ = य − र (परिभाषा से)

= $लघु_{क}$म − $लघु_{क}$न

(११२) सिद्ध करो कि

$$लघु_{क} [म]^{न} = न\ लघु_{क} [म]$$ अर्थात्

"किसी राशि के घात का लघुगणक उस राशि के

उसी आधार के लघुगुणक एवं घात के घाताङ्क के गुणनफल के बराबर होता है।"

मानलो कि $य = लघु_{क} म$

अतः $क^{य} = म$

$$\therefore म^{न} = \left(क^{य}\right)^{न} = क^{य न}$$

$$अतएव\ लघु_{क}\left(म^{न}\right) = य न$$

$$= न\ लघु_{क} म$$

(११२) उदाहरण १—$लघु_{क} \frac{२०}{२१} = लघु_{क} २० — लघु_{क} २१$

$$= लघु_{क} (२ \times २ \times ५) — लघु_{क} (३ \times ७)$$

$$= लघु_{क} २ + लघु_{क} २ + लघु_{क} ५$$

$$— लघु_{क} ३ — लघु_{क} ७$$

$$= २\ लघु_{क} २ + लघु_{क} ५ — लघु_{क} ३ — लघु_{क} ७$$

उदाहरण २—$लघु \frac{(क\ ख^{२}\ ग^{४})^{\frac{१}{६}}}{(क^{-3}\ ख^{3}\ ग^{६})^{\frac{१}{२}}}$

$$= लघु \frac{क^{\frac{१}{६}}\ ख^{\frac{२}{६}}\ ग^{\frac{४}{६}}}{क^{-\frac{3}{२}}\ ख^{\frac{3}{२}}\ ग^{\frac{६}{२}}}$$

$$= लघु \frac{क^{\frac{१}{६}}}{क^{-\frac{१}{3}}} = लघु\ क^{\frac{१}{६} + \frac{१}{3}}$$

$$= लघु\ क^{\frac{१}{२}} = \frac{१}{२}\ लघु\ क$$

उदाहरण ३—यदि $क = लघु \frac{६}{५}$, $ख = लघु \frac{१०}{९}$,

$ग = लघु \frac{२५}{२४}$ हो तो सिद्ध करो कि

$लघु\ २ = ३ क + ख + ग$ (उ० प्र० १९३९)

$३ क + ख + ग$

$= ३ लघु \frac{६}{५} + लघु \frac{१०}{९} + लघु \frac{२५}{२४}$

$= लघु \left(\frac{६}{५}\right)^३ + लघु \frac{१०}{९} + लघु \frac{२५}{२४}$

$= लघु \frac{२१६}{१२५} \cdot \frac{१०}{९} \cdot \frac{२५}{२४}$

$= लघु\ २$

(११४) (१) चूँकि हम बीजगणित से जानते हैं कि

$क^० = १$

$\therefore लघु_क\ १ = ०$ (परिभाषा से)

अतः किसी भी आधार पर इकाई का लघुगणक शून्य होता है।

(२) चूँकि $क^१ = क$

$\therefore लघु_क (क) = १$

अतः किसी राशि का लघुगणक उसी आधार पर इकाई होता है।

(११५) सिद्ध करो कि

$$लघु_क\ म = लघु_ख\ म \times लघु_क\ ख$$

मान लो $लघु_क (म) = य$, $लघु_ख\ म = र$, $लघु_क\ ख = ल$

अतः $क^य = म$, $ख^र = म$, $क^ल = ख$

$$\therefore \text{क}^{\text{य}} = \text{म} = \text{ख}^{\text{र}} = (\text{क}^{\text{ल}})^{\text{र}}$$

$$= \text{क}^{\text{ल र}}$$

$$\therefore \quad \text{य} \quad = \text{ल र}$$

$$\text{अतएव}\quad \text{लघु}_{\text{क}}\,(\text{म}) \quad = \text{लघु}_{\text{ख}}\,\text{म}\ \text{लघु}_{\text{क}}\,\text{ख}$$

साधारण लघुगणक
(Common Logarithms)

(११६) लघुगणकों के क्रियात्मक प्रयोगों में आधार १० लिया जाता है जिससे गणना में सुगमता एवं सुबोधता दोनों ही आ जाती हैं। इस प्रकार की लघुगणकों को साधारण लघुगणक (Common Logarithms) कहा जाता है।

दूसरे प्रकार की लघुगणक जिसमें आधार ई (= २·७१८..........) लिया जाता है नेपियर लघुगणक (Napier Logarithms) कहलाता है। इसका प्रयोग केवल सैद्धान्तिक ही है जो कि अधिकतर उच्च गणित में होता है। इसका पूर्ण विवरण किसी भी बीजगणित की पुस्तक में मिल सकता है।

(११७) साधारण लघुगणकों में

१	का लघुगणक	०	होता है
१०	,,	१	,,
१००	,,	२	,,
१०००	,,	३	,,
....	....	....	....

अत: उन सभी संख्याओं का जो १ और १० के बीच में है, लघुगणक ० और १ के बीच में होता है।

उन सभी संख्याओं का जो कि १० और १०० के बीच में है लघुगणक १ और २ के बीच में होता है।

उन सभी संख्याओं का जो कि १०० और १००० के बीच में है लघुगणक २ और ३ के बीच में होता है।

१ से १०८००० तक की सभी संख्याओं के लघुगणक निकाल कर सारिणी रूप में रक्खे जा चुके हैं।

१ से १२ तक की संख्याओं की लघुगणकों की सारिणी नीचे दी जाती है—

संख्या	लघु	संख्या	लघु
१	०'००००	७	०'८४५१
२	०'३०१०	८	०'६०३१
३	०'४७७१	६	०'६५४२
४	०'६०२०	१०	१'००००
५	०'६६६०	११	१'०४१४
६	०'७७८१	१२	१'०७६२

(११८) पूर्णांश एवं दशमलवांश (Characteristic & Mantissa)

यदि किसी संख्या के लघुगणक में पूर्ण एवं भिन्नात्मक भाग दोनों हों तो पूर्ण भाग को पूर्णांश (Characteristic) एवं भिन्नात्मक भाग को दशमलवांश (Mantissa) कहते हैं। यदि पूर्णाङ्क भाग

न हो तो पूर्णांश शून्य होगा। उदाहरणतः १२ के लघुगणक में १ पूर्णांश है और ·०७६२ दशमलवांश।

ऋणात्मक पूर्णांश—मान लो सारिणी से हम जानते हैं कि—

लघु ३ = ०·४७७१२१३

अतः लघु $\frac{१}{३}$ = लघु १ − लघु ३

= ० − ·४७७१२१३

= − ·४७७१२१३

= एक ऋणात्मक संख्या

किन्तु यह उपयुक्त एवं सुविधाजनक समझा गया है कि सभी लघुगणकों के दशमलवांश को धनात्मक रक्खा जाय अतः हम − ·४७७१२१३ के स्थान पर − (१ − ·५२२८७८७) लिखते हैं।

∴ लघु $\frac{१}{३}$ = − (१ − ·५२२८७८७)

= − १ + ५२२८७८७ जिसे कि संक्षेप में

$\bar{१}$·५२२८७८७ लिख दिया जाता है।

जो क्षैतिज रेखा १ के ऊपर खींची गयी है इस बात को बतलाती है कि दशमलव से पहिले का भाग ऋणात्मक है और दशमलव भाग धनात्मक। $\bar{५}$·४७७६२१३ का अर्थ है कि ५ ऋणात्मक है और ·४७७६२१३ धनात्मक अर्थात् इस संख्या का वास्तविक मान − ५ + ·४७७६२१३ है।

(११६) केवल देखकर ही किसी संख्या के लघुगणक के पूर्णांश को ज्ञात करना—

(१) मानलो वह संख्या १ से बड़ी है।

चूँकि $१०^{०}$ = १ ∴ लघु १ = ०

चूँकि $१०^{१}$ = १० ∴ लघु १० = १

चूँकि $१०^{२}$ = १०० ∴ लघु १०० = २

अतः १ और १० के बीच की किसी संख्या का लघुगणक ० और

१ के बीच में होता है जिसका कि पूर्णांश (Characteristic) ० होगा।

१० और १०० के बीच की किसी संख्या का लघुगणक १ और २ के बीच में होता है जिसका कि पूर्णांश १ होगा।

१०० और १००० के बीच की किसी संख्या का लघुगणक २ और ३ के बीच में होता है जिसका कि पूर्णांश २ होगा।

इसी प्रकार १००० और १०००० के बीच की किसी संख्या का लघुगणक ३ और ४ के बीच में होता है जिसका कि पूर्णांश ३ होगा।

अतः किसी संख्या के लघुगणक का पूर्णांश (characteristic) उसके पूर्णांक (Integral part) के अङ्कों की संख्या से १ कम होगा।

(२) मान लो वह संख्या ० और १ के बीच में है।

$\because$ $१०^{०} = १$, $\therefore$ लघु $१ = ०$

$\because$ $१०^{-१} = \frac{१}{१०} = \cdot१$ $\therefore$ लघु $\cdot१ = -१$

$\because$ $१०^{-२} = \frac{१}{१०^{२}} = \cdot०१$ $\therefore$ लघु $\cdot०१ = -२$

$\because$ $१०^{-३} = \frac{१}{१०^{३}} = \cdot००१$ $\therefore$ लघु $\cdot००१ = -३$

१ और ·१ के बीच की किसी संख्या का लघुगणक ० और −१ के बीच में होता है जो कि −१ + दशमलव भाग के बराबर होगा अतः इसका पूर्णांश $\bar{१}$ होगा।

·१ और ·०१ के बीच की किसी संख्या का लघुगणक −१ और −२ के बीच में होता है जो कि −२ + दशमलव भाग के बराबर होगा। अतः इसका पूर्णांश $\bar{२}$ होगा।

उसी प्रकार '०१ और '००१ के बीच की किसी संख्या का लघुगणक −२ और ३ के बीच में होता है जो कि −३ + दशमलव भाग के बराबर होगा अतः इसका पूर्णांश $\bar{३}$ होगा।

अतः किसी भी दशमलव भिन्न के लघुगणक का पूर्णांश ऋणात्मक एवं दशमलव विन्दु के पश्चात् आये हुये शून्यों की संख्या से एक अधिक होता है। उदाहरणतः

(१) ५४५' ३२४१५७३ के लघुगणक (logarithm) का पूर्णांश (characteristic) २ होगा क्योंकि सख्या में दशमलव से पहिले ३ अङ्क हैं।

(२) ५७६३२५४'३२१ के लघुगणक का पूर्णांश ६ होगा क्योंकि संख्या में दशमलव से पहिले ७ अङ्क है।

(३) '६ के लघुगणक का पूर्णांश $\bar{१}$ होगा

(४) '०४५ के लघुगणक का पूर्णांश $\bar{२}$ होगा

(५) '००००१ के लघुगणक का पूर्णांश $\bar{५}$ होगा

(१२०) एक से अङ्कों वाली (digits) सभी संख्याओं के लघुगणकों का दशमलवांश (mantissa) एक सा ही होता है, यदि वे अङ्क उसी क्रम में हों।

मान लो कि हम जानते हैं कि

$$\text{लघु } ५२६१० = ४'७२३५३७८$$

$$\text{तो लघु } ५२६'१० = \text{लघु } \frac{५२६१०}{१००}$$

$$= \text{लघु } ५२६१० - \text{लघु } १००$$

$$= ४'७२३५३७८ - २$$

$$= २'७२३५३७८;$$

$$\text{लघु } '५२६१० = \text{लघु} \frac{५२६१०}{१०००००}$$

= लघु ५२६१० − लघु १०००००

= ४·७२३५३७८ − ५

= $\overline{१}$·७२३५३७८

और लघु ·०००५२६१० = लघु $\frac{५२६१०}{१०^८}$

= लघु ५२६१० − लघु $१०^८$

= ४·७२३५३७८ − ८

= $\overline{४}$·७२३५३७८

५२६१०, ५२६·१०, ·५२६१० और ·०००५२६१० संख्याओं में एक ही से अंक हैं केवल अन्तर दशमलव स्थान का है। किन्तु हम देखते हैं कि उनकी लघुगणकों (logaritms) के दशमलवांश (mantissa) एक ही हैं केवल उनके पूर्णांश (characteristics) ही भिन्न-भिन्न हैं। इन पूर्णांश का पता हम संख्या को देख कर लगा ही सकते हैं।

लघुगणकों की सारिणी का प्रयोग

(Use of the Logarithmic Tables)

(१२१) (क) एक अङ्क की संख्या का लघुगणक (logarithm) ज्ञात करना—(मान लो कि वह ५ है) इस पुस्तक के पीछे लघुगणकों की सारिणी (tables) दी हुई हैं जिसके पहिले स्तम्भ (Column) में १० से ९९ तक सभी संख्यायें लिखी हैं। पहिले स्तम्भ में ५० देखो। इस संख्या के सामने दूसरे स्तम्भ में तुम्हें ६९९० मिलेगा। अतः लघु ५० का दशमलवांश (mantissa) ·६९९० है किन्तु ऊपर के नियमों के अनुसार लघु ५ का दशमलवांश भी यही होगा।

अतः लघु ५ = ०.६९९० है।

(ख) दो अङ्कों की संख्या का लघुगणक ज्ञात करना—(मान लो कि वह संख्या ५६ है) पहिले स्तम्भ (column) में ५६ देखो। दूसरे स्तम्भ में ५६ के सामने तुम्हें ७७०६ मिलेगा। अतएव लघु ५६ = १ ˙ ७७०६ हुआ क्योंकि पूर्णांश (characteristic) तो देखकर ही पता लग सकता है।

उसी प्रकार लघु ˙५६ = १˙ ७७०६ है

(ग) तीन अङ्कों की संख्या का लघुगणक ज्ञात करना—

मानलो कि वह संख्या ३८˙७ है। पहिले स्तम्भ में ३८ देखो। उसके सामने की पंक्ति (raw) में वहाँ तक देखो जहाँ कि ऊपर दिये ७ के अङ्कवाला स्तम्भ (column) न मिल जाय। इस वर्ग (squre) में ५८७७ लिखा हुआ है।

अतः लघु ३८˙७ = १˙५८७७

(घ) चार अङ्कों की संख्या का लघुगणक ज्ञात करना—

मानलो वह संख्या ८६३५ है (ग) की भांति ८६३ का लघुगणक निकालो। तब १,२,३....६ संख्या की दूसरी श्रेणी मे उसी क्षैतिज (horizontal) पंक्ति में देखो जहाँ कि ५ वाले स्तम्भ में इसके सामने ३ लिखा हुआ है। इसे लघु ८६३ में जोड़ दो।

∴ लघु गणक = ८६३० = ३˙६३६०

५ का अन्तर = ३

अतएव लघु ८६३५ = ३˙६३६३

(ङ) चार अङ्कों से अधिक की संख्या के लघुगणक के निकालने के लिये आवश्यक है कि दी हुई संख्या को सारिणी (Tables) के प्रयोग-योग्य बना लिया जाय।

अर्थात् १३५६००० = १˙३५६ × १०^{६}

३७˙८४८ = ३७˙८५ (दशमलव चार अङ्क तक)

˙०१३६७ = १.३६७ × १०$^{-२}$

अब उपर्युक्त संख्याओं का लघुगणक बड़ी सरलता से निकाला जा सकता है।

प्रति–लघुगणक सारिणी
(Anti-logarithmic Tables)—

(१२२) किसी दी हुई लघुगणक से सम्बन्धित (संगत, corresponding) संख्या प्रति-लघुगणक (anti-logarithm) कहलाती है।

यदि लघु ३·८६४ = ·५.१७१ हो तो ·५५७१ का प्रतिलघुगणक ३.८६४ है। उसी प्रकार यदि लघु ३८६० = ३·५८६६ हों तो ३·५८६६ का प्रतिलघुगणक ३८६० है।

गुणा एवं भागों की जटिलता को सरल बनाने के लिये प्रति-लघु गणकों की सारिणी (tables) का निर्माण किया गया है जिनका देखना लगभग वैसा ही है जैसा कि लघुगणकों की सारिणी का। इष्ट संख्या निकालने के लिये हम लघुगणक के दशमलवांश (mantissa) का प्रयोग करते हैं एवं लघुगणक के पूर्णांश (characteristic) से इष्ट संख्या में दशमलव विन्दु को नियत किया जाता है।

मान लो कि हमें वह संख्या निकालनी है जिसका लघुगणक २·६६१३ है। प्रति-लघुगणकों की सारिणी (tables) के प्रथम स्तम्भ (column) में ·६६ देखो और उसी पंक्ति में १ के स्तम्भ (column) के नीचे ६७६५ संख्या मिलेगी। फिर दूसरी श्रेणी में ३ के स्तम्भ के नीचे ६६ की पंक्ति में ७ का अङ्क मिलेगा।

अतएव वह संख्या जिसका लघुगणक ·६६१३ है

= ·६७६५ + ३ का अन्तर (७)

= ·६८०२

चूंकि प्रतिलघु ·६६१३ = ·६०८२

∴ प्रतिलघु २·६६१३ = ६०८·२ है।

(१२३) उदाहरण १— $\dfrac{२\cdot३८ \times ३\cdot६०१}{४\cdot८३}$ का मान बताओ।

$$\text{मानलो } य = \frac{२\cdot३८ \times ३\cdot६०१}{४\cdot८३}$$

$$\text{लघु } य = \text{लघु } २\cdot३८ + \text{लघु } ३\cdot६०१ - \text{लघु } ४\cdot८३$$

$$= \cdot३७६६ + \cdot५५१२ - \cdot६८३९$$

$$= \cdot२८३९$$

$$\therefore \quad य = \text{प्रतिलघु } \cdot२८३९$$

$$= १\cdot९२३$$

उदाहरण २—यदि लघु २ = ·३०१३ और लघु ३ = ·४७७१२१३ हो

तो लघु $\dfrac{५^{\frac{१}{४}} \times २^{\frac{१}{१०}}}{(१८ \times \sqrt{२})^{\frac{१}{३}}}$ का मान बताओ।

$$\text{लघु } \frac{५^{\frac{१}{४}} \times २^{\frac{१}{१०}}}{(१८ \times \sqrt{२})^{\frac{१}{३}}}$$

$$= \text{लघु } \frac{१०^{\frac{१}{४}} . २^{\frac{१}{१०}}}{२^{\frac{१}{४}} (२ . ३^{२} . २^{\frac{१}{२}})^{\frac{१}{३}}}$$

$$= \text{लघु } \frac{१०^{\frac{१}{४}} . २^{\frac{१}{१०}}}{२^{\frac{१}{४}} . २^{\frac{१}{३}} . ३^{\frac{२}{३}} . २^{\frac{१}{६}}} = \text{लघु } \frac{१०^{\frac{१}{४}}}{२^{\frac{१३}{२०}} . ३^{\frac{२}{३}}}$$

$$= \text{लघु } १०^{\frac{१}{४}} - \text{लघु } (२^{\frac{१३}{२०}} \times ३^{\frac{२}{३}})$$

$$= \frac{१}{४} \text{लघु } १० - \frac{१३}{२०} \text{लघु } २ - \frac{२}{३} \text{लघु } ३$$

$$= \frac{१}{४} \times १ - \frac{१३}{२०} \left(\cdot३०१०३ \right) - \frac{२}{३} \left(\cdot४७७१२१३ \right)$$

$$= \cdot२५ - \cdot१९५६६९५ - \cdot३१८०८०६$$

$= -१ + \cdot ७३६२४६६$

$= \bar{१}\cdot ७३६२४६६$

उदाहरण ३— $८^{२५}$ में अङ्कों की संख्या बताओ यदि लघु २ = ·३०१०३ हो।

$$\text{लघु } ८^{२५} = \text{लघु } २^{१००} = १०० \text{ लघु } २$$
$$= १००(\cdot ३०१०३)$$
$$= ३०\cdot १०३$$

चूँकि लघु $८^{२५}$ का पूर्णांश ३० है अतः इसमें ३१ अङ्क होंगे।

उदाहरण ४—३% चक्रवृद्धि ब्याज (Compound interest) पर २५ वर्ष में ३५० रु० का मिश्रधन बताओ। (लघुगणक की सारिणी का प्रयोग करो)

$$\text{मिश्रधन} = \text{मूलधन}\left(१ + \frac{\text{प्रतिशत}}{१००}\right)^{\text{वर्षों की संख्या}}$$

$$= ३५०\left(१ + \frac{३}{१००}\right)^{२५}$$

$$= ३५०\left(\frac{१०३}{१००}\right)^{२५}$$

$$\therefore \text{लघु (मिश्रधन)} = \text{लघु } ३५० + २५ [\text{लघु } १०३ - \text{लघु } १००]$$
$$= २\cdot ५४४१ + २५ [२\cdot ०१२८ - २]$$
$$= २\cdot ५४४१ + २५ [\cdot ०१२८]$$
$$= २\cdot ५४४१ + \cdot ३२००$$
$$= २\cdot ८६४१$$

$$\therefore \text{मिश्रधन} = \text{प्रतिलघु } (२\cdot ८६४१)$$
$$= ७\cdot १\cdot ३ \text{ रु०}$$

उदाहरण ५—यदि लघु ३ = ·४७७१२१३, लघु ७ = ·८४५०६८० और लघु ११ = १·०४१३९२७ हो तो निम्नलिखित समीकरण का हल करो।

$$\text{३}^{\text{य}} \times \text{७}^{\text{२ य + १}} = \text{११}^{\text{य + ५}}$$

$$\therefore \text{ लघु ३}^{\text{य}} + \text{लघु ७}^{\text{२ य + १}} = \text{लघु ११}^{\text{य + ५}}$$

य लघु ३ + (२ य + १) लघु ७ = (य + ५) लघु ११

∴ य [लघु ३ + २ लघु ७ − लघु ११]

= ५ लघु ११ − लघु ७

∴ य [·४७७१२१३ + १·६९०१९६० − १·०४१३९२७]

= ५·२०६९६३५ − ·८४५०९८०

∴ य [१·१२५९२४६] = ४.३६१८६५५

$$\therefore \quad \text{य} = \frac{\text{४·३६१८६५५}}{\text{१·१२५९२४६}}$$

= ३·८७............

अभ्यास २०

(१) यदि लघु २ = ·३०१०३ हो तो लघु ६२५ और लघु २५०० का मान बताओ।

(२) यदि लघु २ = ·३०१०३, लघु ३ = ·४७७१, लघु ७ = ·८४-५१ हो तो लघु ४२, लघु ६४, लघु ८१ का मान बताओ।

(३) यदि लघु २ = ·३०१०, लघु ३ = ·४७७१ हो तो लघु ५·८३२ का मान बताओ।

(४) यदि लघु ३ = ·४७७१, लघु ७ = ·८४५१ और लघु ११ = १·०४१३ हो तो लघु ७६२३ का मान बताओ।

(५) सिद्ध करो कि $\text{लघु}_{\text{ख}}\text{ क} \times \text{लघु}_{\text{क}}\text{ ख} = \text{१}$

(६) यदि लघु म + लघु न = लघु (म + न) हो तो म का मान न में बताओ।

(७) यदि लघु $\frac{१०२५}{१०२४}$ = प और लघु २ = फ हो तो सिद्ध करो कि

लघु ४१०० = प + १२ फ

सिद्ध करो कि

(८) $लघु_२ \; लघु_२ \; लघु_३ \; ८१ = १$

(९) लघु (१ + २ + ३) = लघु १ + लघु २ + लघु ३

(१०) २ लघु क + २ लघु $क^२$ + २ लघु $क^३$ + ...२ लघु $क^स$

= स (स + १) लघु क जहाँ कि स कोई पूर्ण संख्या है।

(११) $लघु_क \; य = लघु_ख \; य \times लघु_ग \; ख \times लघु_घ \; ग \cdots लघु_क \; स$

(१२) लघु $\frac{२६}{५१}$ + लघु $\frac{११६}{६१}$ = लघु २ − लघु ३

(१३) लघु $\frac{३ \times \sqrt{३२}}{४७ \times १८^{\frac{१}{३}}}$ = $\frac{१}{३}$ लघु ३ − $\frac{५}{६}$ लघु २ − लघु ५

(१४) ७ लघु $\frac{१५}{१६}$ + ६ लघु $\frac{८}{३}$ + ५ लघु $\frac{२}{५}$ + लघु $\frac{३२}{२५}$

= लघु ३

(१५) ७ लघु $\frac{१६}{१५}$ + १ लघु $\frac{२५}{२४}$ + ३ लघु $\frac{८१}{८०}$ = लघु २

(उ० प्र० १६४० राजपूताना १६४२)

(१६) यदि लघु १६५ = २·२१७५, लघु ६६७४ = ३·८४३५ हो तो

$\sqrt[५]{\cdot००००० १६५}$ का मान बताओ।

(उ० प्र० हाईस्कूल १६४५)

(१७) ·००७६२ का सप्तमूल बताओ यदि लघु ११

= १·०४१४, लघु ५००·६७७ = २·६६६८ हो।

(१८) (·००२०७३६) का सप्तमूल बताओ यदि लघु ४१३६१ = ४·६१६६७५ हो।

(१६) निम्नलिखित में पूर्णांश (characteristic) बताओ:

(क) लघु ३५३·७१२

(ख) लघु १·३६५४

(ग) लघु ७७३४५·१४५६

(घ) लघु $(२४६१५)^{\frac{१}{५}}$

(ङ) लघु $(२४५८६)^{\frac{३}{४}}$

(च) लघु ·०००३२

(२०) यदि लघु ३७२०३ का दशमलवांश (mantissa) ·५७०६ हो तो ३७·२०३, ·०००३७२०३, ३७२०३००० के लघुगणक बताओ।

(२१) यदि लघु २४३२ = ३·३८५६४ हो तो वे संख्यायें बताओ जिनका लघुगणक ·३८५६४, $\bar{१}$·३८५६४, $\bar{२}$.३८५६४ हो।

(२२) यदि लघु २ = ·३०१०३, लघु ३ = ·४७७१२१३ हो तो निम्नलिखित में अङ्कों की संख्या बताओ :—

$$२^{४०},\ ३^{११},\ ३^{६२},\ २^{१००},\ (५४०)^{९},\ २^{१३७},\ (४३२)^{२५}$$

(२३) यदि लघु २ = ·३०१०३, लघु ३ = ·४७७१२१३ हो तो निम्नलिखित में दशमलव के बाद शून्यों की संख्या बताओ:—

$$\left(\frac{१}{४.०५}\right)^{८},\ \bar{३}^{१३},\ \bar{३}^{६५},\ (·०२५६)^{५०}$$

सरल करो (आवश्यकता पड़ने पर सारिणी का प्रयोग कर सकते हो।)

(२४) $\left(\frac{२६४ \times १६५}{४२ \times ३२}\right)^{\frac{२}{५}}$

(२५) $\dfrac{७७१६ \times (४५\cdot६२)}{(.०००३८)^{\frac{१}{२}} \times १४६४०००}$

(२६) $\dfrac{४\cdot७३२ \times (\cdot१७८५)^{२}}{(२७६.९)^{\frac{१}{२}}}$

(२७) दिया हुआ है कि

लघु २ = ·३०१०३००

लघु ३ = ·४७७१२१३

लघु ७ = ·८४५०९८० तो

$\left(\dfrac{३^{२}}{२^{५} \times ७}\right)^{\frac{१}{३}}$ का लघुगणक बताओ

(उत्तर प्रदेश पूरक १९४८)

सरल करो :—

(२८) $\dfrac{\sqrt{५} + ७^{\frac{१}{३}}}{८^{\frac{१}{४}}\ ९^{\frac{१}{६}}}$

(२९) लघु $\left(\dfrac{८^{\frac{१}{४}} \times १४^{\frac{१}{३}}}{\sqrt{७२} \times ६०^{\frac{१}{६}}}\right)^{\frac{७}{०}}$

(३०) यदि लघु २ = ·३०१०३, लघु ४८४४५४४ = ६·६८५२५३

हो तो $(६\cdot४)^{\frac{१}{१०}} \times (\cdot२५६)^{\frac{३}{४}} \div \sqrt{८०}$ का मान बताओ

(पंजाब १९४४, उ० प्र० हाईस्कूल १९४६)

(३१) यदि लघु २ = ·३०१०३, लघु ३ = ·४७७१२१३,

लघु ७ = ·८४५०९८० हो तो निम्नलिखित समीकरणों को हल करो।

(क) $९^{३-४य} \times ४^{य+५} = ८$

(ख) $२^{य} \cdot ३^{२य} = ५^{य-१}$

(ग) $\text{लघु } य = \text{लघु } ३ + २ \text{ लघु } २ - \frac{३}{४} \text{ लघु } १६$

(घ) $७^{२य} = ३^{३य - ७} . २^{य - ४}$

(ङ) $७^{य + र} \times ३^{२य + र} = ६$ एवं

$$३^{य - र} \div २^{य - २र} = ३^{य}$$

(३२) यदि कुछ संख्यायें गुणोत्तर श्रेणी (Geometrical Pro.) में हों तो सिद्ध करो कि उनके लघुगणक (logs) समान्तर श्रेणी (A. P.) में होगी।

(३३) कितने वर्ष में १६६ रु० ८ आ० ५% चक्रवृद्धि ब्याज से ४५० रु० हो जायेंगे।

(३४) कितने प्रतिशत वार्षिक से १२०० रु० १५ वर्ष में चक्रवृद्धि ब्याज से २०,००० रु० हो जायेंगे, जब कि लघु २ = ·३०१०३, लघु ३ = ·४७७१२, लघु १२०६३ = ४·०८१४५ हो?

(३५) यदि $\text{लघु } (य^{२} र^{३}) = क$, $\text{लघु } \frac{य}{र} = ख$ तो लघु य और लघु र का मान बताओ (कलकत्ता १९१९)

(३६) यदि $\frac{\text{लघु } य}{र - ल} = \frac{\text{लघु } र}{ल - य} = \frac{\text{लघु } ल}{य - र}$ हो तो

सिद्ध करो कि

$$य^{य} . र^{र} . ल^{ल} = १$$

(३७) यदि $य = क र^{१ - प} = ख र^{१ - फ} = ग र^{१ - ब}$

सिद्ध करो कि

$$(फ - ब) \text{ लघु } क + (ब - प) \text{ लघु } ख + (प - फ) \text{ लघु } ग = ०$$

(३८) यदि $प = लघु_{क} \; ख ग$, $फ = लघु_{ख} \; ग क$,

$$ब = लघु_{ग} \; क ख$$

सिद्ध करो कि

$प \times फ \times ब = प + फ + ब + २$ (राजपूताना १९४१)

(३९) यदि $य = लघु_{२क} क$, $र = लघु_{३क} २क$, $ल = लघु_{४क} ३क$

सिद्ध करो कि

$य र ल + १ = २ र ल$ (उ० प्र० १९४९)

(४०) यदि क, ख, ग गुणोत्तर श्रेणी (G. P.) में हों तो सिद्ध करो कि $लघु_{क} न$, $लघु_{ख} न$, $लघु_{ग} न$ हरात्मक श्रेणी (H. P.) में होंगे।

(४१) सिद्ध करो कि $लघु_{ख} क \times लघु_{ग} ख \times लघु_{क} ग = १$

(४२) यदि $क^{२} + ख^{२} = १४ \; क ख$ सिद्ध करो कि

$$लघु \frac{क + ख}{४} = \frac{१}{२} (लघु क + लघु ख)$$

(४३) यदि य, र, ल हरात्मक श्रेणी (H.P.) में हों तो सिद्ध करो कि लघु(य + ल) + लघु(य − २ र + ल)

= २ लघु (य − ल) (राजपूताना १९४६)

(४४) यदि

$$\frac{य र \; लघु (य र)}{य + र} = \frac{र ल \; लघु (र ल)}{र + ल} = \frac{ल य \; लघु (ल य)}{ल + य}$$

सिद्ध करो कि

$$य^{य} = र^{र} = ल^{ल}$$

समानुपाती अंशों का सिद्धान्त
(Principle of Proportional Parts)

(१२४) यदि किसी संख्या में ऐसी वृद्धि की जाय जो उस संख्या की अपेक्षा बहुत छोटी हो तो यह वृद्धि और उस संख्या के लघुगणक की संगत वृद्धि लगभग समानुपाती होगी। यही **समानुपाती अंशों** का सिद्धान्त है।

यदि ५२५३ और ५२५४ के लघुगणक (logarithms) दिये हुये हों तो उन दोनों के अन्तर से जो कि संख्या में १ बढ़ जाने से हो गया है ५२५३·७ का भी लघुगणक पारस्परिक अनुपात से निकाला जा सकता है। यदि ज्या२६° ५०′ और ज्या २६° ५१′ ज्ञात हों तो उन दोनों के अन्तर से जो कि कोण में ६०″ बढ़ जाने से हो गया है, ज्या २६° ५०′ ४०″ का मान भी पारस्परिक अनुपात से निकाला जा सकता है। यही समानुपातीय अंशों का सिद्धान्त है जो कि निम्नलिखित उदाहरणों से भली भाँति प्रकट हो जायगा।

(१२५) उदाहरण १—यदि लघु ३ = ·४७७१ और लघु ४ = ·६०२१ हो तो लघु ३·२५ बताओ।

लघु ४ = ·६०२१

लघु ३ = ·४७७१

∴ संख्या में १ के अन्तर से लघु में अन्तर = ·१२५० हो जाता है मान लो संख्या में ·२५ के अन्तर से लघु में य का अन्तर है।

$$\therefore \frac{\text{य}}{\cdot १२५०} = \frac{\cdot २५}{१}$$

∴ य = ·०३१२५

अतः लघु ३·२५ = ·४७७१ + ·०३१२५

= ·५०८२५०

उदाहरण २—यदि कोज्या ३२°१६′ = ·८४५५७२६

कोज्या ३२°१७′ = ·८४५४१७२ हो तो कोज्या ३२°१६′२४″ बताओ।

हम जानते हैं कि जब कोण ० से १८०° की ओर बढ़ता है तो कोज्या घटता जाता है

अतः कोण में ६०″ बढ़ जाने पर कोज्या ·०००१५५४ घट गया है

∴ „ २४″ „ „ $= \frac{२४}{६०} \times$ ·०००१५५४ घट जायगा

= ·०००६२१६ „

∴ कोज्या ३२°१६′२४″ = ·८४५५७२६ − ·०००६२१६

= ·८४५५१०४४

त्रिकोणमितीय निष्पत्तियों के लघुगणक

(Logarithms of Trigonometrical Ratios)

(१२६) बहुधा हमें दिये हुये कोण की त्रिकोणमितीय निष्पत्तियों के लघुगणकों की आवश्यकता पड़ती है जिसे निकालने की एक पद्धति तो यह है कि पहिले सारिणी (tables) को देखकर दिये हुये कोण की त्रिकोणमितीय निष्पत्तियो को निकाला जाय और फिर लघुगणकों की सारिणी से उन निष्पत्तियों के लघुगणक (logarithms) निकाल लिये जायँ, किन्तु इसमें परिश्रम बहुत पड़ता है। बार-बार के परिश्रम को दूर करने के लिये गणितज्ञों ने कोणों की त्रिनिष्पत्तियों के लघुगणकों की सारिणी (tables) भी बना डाली है। व्यवहार में प्रायः त्रिनिष्पत्तियों के लघुगणक स्वयं निष्पत्तियों से भी अधिक काम के होते हैं। चूँकि कोणों की ज्या और कोज्या सदैव ही इकाई से कम होती हैं इसलिये उनके लघुगणक सदा ऋणात्मक होते हैं। ४५° से छोटे कोणों के स्प (tan) और ४५° से बड़े कोणों के कोस्प के भी लघुगणक

ऋणात्मक होते हैं। इन सब कारणों से सारिणी (tables) में बार-बार + अथवा - चिह्न छापने की असुविधा को दूर करने के लिये इन लघुगणकों में १० जोड़ दिया जाता है। तब ये संख्यायें निष्पत्तियों की **सारिणिक लघुगणक** (Tabular logarithms) कही जाती हैं। संक्षेप में इनका बोध **सालघु** (L) से किया जाता है।

उदाहरणार्थ (१) स्प ६०° = √३

$$\text{लघु स्प } ६०° = \frac{१}{२} \text{ लघु } ३$$
$$= \frac{१}{२} (\cdot४७७१२१३)$$
$$= \cdot२३८५६०६$$

अतः सारिणिक लघुगणक स्प ६०° = १० + ·२३८५६०६

सालघु स्प ६०° = १०·२३८५६०६

(२) कोज्या ६०° = $\frac{१}{२}$

$$\text{लघु कोज्या } ६०° = \text{लघु}\frac{१}{२} = - \text{लघु } २$$
$$= - \cdot३०१०३$$
$$= \bar{१}\cdot६९८९७$$

अतः सारिणिक लघुगणक कोज्या ६०° = १० + $\bar{१}$·६९८९७

सालघु कोज्या ६०° = ९·६९८९७

(१२७) ऊपर दिया हुआ समानुपातीय अंशों का सिद्धान्त (Principle of Proportional Parts) छोटे से छोटे अन्तर के सालघु निकालने में भी प्रयोग किया जा सकता है। विद्यार्थियों को इस बात को ध्यान में रखना अत्यन्त आवश्यक है कि कोण के बढ़ने से त्रिनिष्पत्ति (trigonometrical ratios) बढ़ती हैं या घटती हैं, नहीं तो त्रुटि होने की आशंका बनी रहेगी।

(१२८) उदाहरण १—यदि

सालघु ज्या ४४°१७′ = ९·८४३९८४२ और

सालघु ज्या ४४°१८′ = ९·८४४११३७ हो तो

सालघु ४४°१७′३३″ का मान बताओ और इससे

सालघु व्युज्या ४४°१७′३३″ का भी मान बताओ।

(१) ६०″ के अन्तर के लिये सालघु ज्या में अन्तर = ·०००१२९५

३३″ „ „ „ $= \frac{३३}{६०} \times$ ·०००१२९५

= ·००००७१२२५

अतः सालघु ज्या ४४°१७′३३″

= ९·८४३९८४२ + ·००००७१२२५ = ९·८४४०५५४२५

(२) ∵ ज्या ४४°१७′ ३३″ × व्युज्या ४४°१७′३३″ = १

∴ लघु ज्या ४४°१७′३३″ + लघु व्युज्या ४४°१७′३३″ = ०

∴ सालघु ज्या ४४°१७′३३″ + सालघु व्युज्या ४४°१७′३३″ = २०

∴ सालघु व्युज्या ४४°१७′३३″

= २०—सालघु ज्या ४४°१७′ ३३″

= २०—९·८४४०५५४

= १०·१५५९४४६

उदाहरण २—यदि सालघु स्प २२°३६′ = ९·६१९७२०५ और १′ के लिये अन्तर = ३५५७ हो तो सालघु स्प २२°३७′२२″ का मान बताओ।

१′ के लिये अन्तर = ३५५७ से तात्पर्य यह होता है कि दशमलव के सात अङ्कों में ये पिछले अङ्क हैं और इनसे पहिले दशमलव तक तीन शून्य हैं।

चूँकि १′ के लिये वास्तविक अन्तर = ·०००३५५७ है

∴ २२″ ,, ,, = $\frac{२२}{६०}$ × ·०००३५५७

= ·०००१३०४२३

∴ सालघु स्प २२°३७′२२″

= ६·६१६७२०५ + ·०००१३०४२३

= ६·६१६८५०६२३

अभ्यास २१

(१) यदि लघु ५७८२६ = ४·७६२१२३२ और
लघु ५७८२७ = ४·७६२१३०७ हो तो
लघु ५७८२६·४३ का मान बताओ।

(२) यदि लघु ५८११३० = ५·७६५२७३३
लघु ५८११४० = ५·७६४२८०८ हो तो लघु ५८११३६ का मान बताओ।

(३) लघु ६६७१४ = ४·८४३३२०० और
लघु ६६७१५ = ४·८४२३२६२ हो तो
लघु (·०००६६७१४५)$^{\frac{१}{५}}$ का मान बताओ।

(४) यदि लघु १०६८६ = ४·०१८८१५२
लघु १·०६८७ = ·०२८८५५४
तो उस संख्या को ज्ञात करो जिसका लघुगणक
$\overline{१}$·०२८८४३५ है।

(५) यदि ज्या ४३° २३′ = ·६८६८७६१
ज्या ४३° २४′ = ·६८७०८७५
तो ज्या ४३° २३′ ४०″ का मान बताओ।

(६) यदि व्युज्या ५५° २१′ = १·२१५५६७८
व्युज्या ५५° २२′ = १·२१५२५३५

तो व्युज्या ५५° २१′ २८″ का मान बताओ।

(७) यदि ज्या १२° १५′ = ·२१२१०७७
१′ के लिये अन्तर = २८४२ हो तो
ज्या १२° १५′ २०″ का मान बताओ।

(८) यदि स्प ४६° २५′ = १·१६७४०७१
१′ के लिये अन्तर = ६८७६ हो तो
स्प ४६° २५′ १६″ का मान बताओ

(९) यदि कोस्प ३७° ३०′ = १·३०३२२५४
१′ के लिये अन्तर = ७८४७ हो तो
कोस्प ३७° ३०′ ४″ का मान बताओ

(१०) वह कोण बताओ जिसकी ज्या $\frac{३}{१०}$ हो यदि
ज्या १७° २७″ = ·२६६८७३४
१′ के लिये अन्तर = ·०००२७७५ हो

(११) वह कोण बताओ जिसकी कोज्या $\frac{३}{४}$ हो यदि
कोज्या ४१° २४′ = ·७५०११११
१′ के लिये अन्तर = १६२४ हो

(१२) यदि सालघु कोज्या ३४° ४४′ = ६·६१४७७२६
सालघु कोज्या ३४° ४५′ = ६·६१४६८५२ हो
तो सालघु कोज्या ३४° ४४′ २७″ का मान बताओ।

(१३) यदि सालघु व्युज्या ३२°२१′ = १०·२७१५७३३
सालघु व्युज्या ३२°२२′ = १०·२७१३७४० हो तो
सालघु व्युज्या ३२°२१′५१″ का मान बताओ

(१४) यदि सालघु ज्या ३७°४३′५०″ = ६·७८६७१५२
सालघु ज्या ३७°४४′ = ६·७८६७४२४ हो तो
सालघु ज्या ३७°४३′५६″ का मान बताओ।

(१५) यदि सालघु कोस्प ५३°१३′ = ६·८७३६६३७
सालघु कोस्प ५३°१४′ = ६·८७३४३०२ हो तो वह कोण बताओ जिसके कोस्प का सालघु ६·८७३४५२३ हो ।

(१६) यदि सालघु कोस्त १८°३५′ = १०·४७३३८५०
१′ के लिये अन्तर = ·०००४१८१ हो तो
सालघु कोस्त १८°३५′१२″ का मान बताओ ।

(१७) यदि सालघु कोज्या १०°१५′ = ६·६६३०१३१
१′ के लिये अन्तर = २२६ हो तो वह कोण ज्ञात करो जिसकी सालघु कोज्या ६·६३ हो ।

(१८) यदि सालघु कोस्प ६०°३८′ = ६·७५०२८०६
१′ के लिये अन्तर = २६५६ हो तो
सालघु कोस्प ६०°३८′४७″ का मान बताओ ।

(१९) यदि सालघु ज्या ३६°४०′ = ६·७७६०८६७
सालघु कोज्या ३६°४०′ = ६·६०४२४११ हो तो
सालघु स्प ३६°४०′ का मान बताओ ।

(२०) यदि सालघु कोज्या ४१°७′ = ६·७६७७७५
१′ के लिये अन्तर = १५६७ हो तो वह कोण बताओ जिसकी सालघु कोज्या ६·७६७७६३५ हो ।

प्रेस की भूल से पृष्ठ २२५ की पुनरावृत्ति होगई है।

अध्याय १३

त्रिभुज-निर्धारण

(Solution of Triangles)

(१२६) किसी भी त्रिभुज में तीन भुजायें एवं तीन कोण बहुधा त्रिभुज के स्वतन्त्र **अङ्ग** (elements) कहलाते हैं। यदि इनमें से किन्हीं तीन के मान (तीनों कोणों के ही नहीं) दिये हों तो त्रिभुज के शेष तीन अङ्ग निर्धारित किये जा सकते हैं और त्रिभुज निश्चयात्मक रूप से बन सकता है। त्रिभुज के तीनों कोण स्वतन्त्र अङ्ग नहीं हैं क्योंकि केवल दो कोणों के ज्ञात होने पर तीसरा स्वतः ही ज्ञात हो जाता है। फिर भी तीनों कोणों के दिये जाने पर त्रिभुज आकार (size) से न सही तो स्वरूप (shape) से तो ज्ञात हो ही जाता है। त्रिभुज के दिये हुये तीन अङ्गों के द्वारा ज्या आदि के प्रयोग से उसके शेष अज्ञात अङ्गों को ज्ञात करने की क्रिया को **त्रिभुज-निर्धारण** कहते हैं।

पहिले हम केवल समकोण त्रिभुजों पर विचार करेंगे।

मानलो त्रिभुज क ख ग समकोण त्रिभुज है और ∠ ग समकोण है। त्रिभुज-निर्धारण के लिये शेष पाँच अङ्गों में से कम से कम दो अन्य अङ्ग ज्ञात होना आवश्यक है; नहीं तो त्रिभुज निश्चयात्मक रूप से न बन सकेगा। अतः निम्न स्थितियाँ उपस्थित हो सकती हैं—

(१) दो भुजायें ज्ञात हों; या

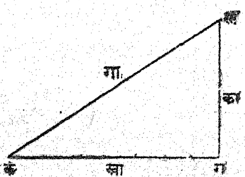
(२) एक भुजा और कर्ण ज्ञात हों; या

(३) एक भुजा और सम्मुख कोण (जैसे का और क) ज्ञात हों; या

(४) एक भुजा और आसन्न-कोण (जैसे का और ख) ज्ञात हों; या

(५) कर्ण और एक कोण ज्ञात हो।

(१३०) प्रथम स्थिति—दो भुजायें (का, खा) ज्ञात हों



यहाँ स्प क $=\frac{\text{का}}{\text{खा}}$

$\therefore$ सालघु स्प क $= १० +$ लघु का $-$ लघु खा

चूँकि का और खा ज्ञात हैं, अतः सालघु स्प क के ज्ञात होने के कारण कोण क ज्ञात हो जायगा।

$\therefore$ ख $= ९०^\circ -$ क

गा $= \sqrt{\text{का}^२ + \text{खा}^२}$

द्वितीय स्थिति—एक भुजा (का) और कर्ण (गा) ज्ञात हों—

ज्या क $= \frac{\text{का}}{\text{गा}}$

सालघु ज्या क $= १० +$ लघु का $-$ लघु गा

चूँकि का और गा ज्ञात हैं अतः सालघु ज्या क के ज्ञात होने के कारण कोण क ज्ञात हो जायगा।

कोण ख $= ९०^\circ -$ क

का $= \sqrt{\text{गा}^२ - \text{खा}^२} = \sqrt{(\text{गा} - \text{खा})(\text{गा} + \text{खा})}$

$=$ गा ज्या क $=$ गा कोज्या ख

तृतीय स्थिति—एक भुजा (का) और सम्मुख कोण (क) ज्ञात हो।

कोण ख $= ९०^\circ -$ क

$$\frac{\text{गा}}{\text{ज्या ग}} = \frac{\text{का}}{\text{ज्या क}}$$

$$\therefore \text{गा} = \frac{\text{का}}{\text{ज्या क}} \text{ ज्या ग}$$

$= \frac{\text{का}}{\text{ज्या क}}$ ज्या ९०° $= \frac{\text{का}}{\text{ज्या क}}$

तथा लघु गा = लघु का − लघु ज्या क

$\frac{\text{का}}{\text{खा}}$ = स्प क

अतः खा = का कोस्प क है

चतुर्थ स्थिति—एक भुजा (का) और आसन्न कोण (ख) ज्ञात हो

कोण क = ९०° − ख है

कोस्प ख $= \frac{\text{का}}{\text{खा}}$

∴ खा = का स्प ख

कोज्या ख $= \frac{\text{का}}{\text{गा}}$

∴ गा = का व्युको ख है।

पंचम स्थिति—कर्ण (गा) और एक कोण (क) ज्ञात हो

कोण ख = ९०° − क

∵ $\frac{\text{का}}{\text{गा}}$ = ज्या क

∴ का = गा ज्या क है

∵ $\frac{\text{खा}}{\text{गा}}$ = कोज्या क

∴ खा = गा कोज्या क है

(१३१) उदाहरण—एक समकोण त्रिभुज क ख ग में कोण ग समकोण है। यदि का = ५० और ख = ७५° हो तो त्रिभुज को निर्धारित करो।

$$\text{कोण ग} = ९०° - ७५° = १५°$$

$$\because \frac{\text{खा}}{\text{का}} = \text{स्प } ७५°$$

$$\therefore \text{खा} = \text{का स्प } ७५°$$

$$= ५० (२ + \sqrt{३})$$

$$\therefore \text{गा} = \sqrt{\text{का}^२ + \text{खा}^२}$$

$$= [५०^२ + ५०^२ (२ + \sqrt{३})^२]^{\frac{१}{२}}$$

$$= १००\sqrt{२ + \sqrt{३}}$$

अभ्यास २२

(१) त्रिभुज क ख ग में जिसमें कोण ग समकोण है, शेष भुजाओं को ज्ञात करो जब कि

(क) कोज्या क = $\frac{९}{४१}$ और गा = १२·३ से० मी०

(ख) ज्या क = $\sqrt{\frac{३}{४}}$ और का = ४$\sqrt{३}$ फीट।

(२) क ख ग एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसमें क ख = क ग और क घ, ख ग पर लम्ब है।

(क) यदि ∠ ख = ४५°, और गा = ६″ तो शेष भुजाओं को ज्ञात करो।

(ख) यदि ∠ ख = ३०° और का = ८ से० मी० तो क ख, क घ की गणना करो।

(ग) यदि ∠ क = १२०° और गा = ३″ तो शेष भुजायें ज्ञात करो।

(३) सारिणी की सहायता से △ क ख ग के शेष अङ्गों को बताओ जब कि

(क) ∠ क = ३६°५२′ ∠ ख = ५३°८′, गा = ५०० से० मी०

(ख) $\angle$ ख = ७०°३३′, $\angle$ ग = १६°२८′, का = १५ फीट

(४) किसी त्रिभुज क ख ग के क विन्दु से ख ग पर क घ लम्ब डाला गया है यदि क घ = ३ और खा, गा क्रमशः ४ तथा ५ हों तो कोणों को बताओ जब कि

लघु २ = ·३०१०३, लघु ३ = ·४७७१२१३

सालघु ज्या ३६° ५२′ = ६·७७८११८६,

१′ के लिये अन्तर = १६८४

सालघु ज्या ४८°३५′ = ६·८७५०१४२,

१′ के लिये अन्तर = १११५ हो।

(५) यदि किसी समकोण त्रिभुज का कर्ण समकोण से उस पर डाले हुए लम्ब से चौगुना हो तो उसके कोणों को बताओ।

(६) यदि एक त्रिभुज में का = ३८४, खा = ३३०, ग = ६०° हो तो शेष कोण बताओ जब कि

लघु ११ = १·०४१३६२७, लघु २० = १·३०१०३००

सालघु स्प ४६°१६′ = १०.०६५६८८६

सालघु स्प ४६.२०′ = १०·०६५६४४१ (पटना १६३७)

---

(१३२) अब हम उन त्रिभुजों पर विचार करेंगे जो समकोण नहीं हैं। इनकी निम्न भिन्न-भिन्न स्थितियाँ उपस्थिति हो सकती हैं; जब कि

(१) तीनों भुजायें ज्ञात हों, या

(२) दो भुजायें और उनके बीच का कोण ज्ञात हो, या

(३) एक भुजा और दो कोण ज्ञात हो, या

(४) तीनों कोण ज्ञात हों

(५) दो भुजायें और एक सम्मुख कोण ज्ञात हो

यहाँ पर इन भिन्न-भिन्न परिस्थितियों का विस्तृत रूप से वर्णन किया जायगा।

स्थिति १

(१३३) जब कि तीनों भुजायें ज्ञात हों

यहाँ पर इन सूत्रों का प्रयोग हो सकता है—

$$\text{कोज्या क} = \frac{\text{खा}^2 + \text{गा}^2 - \text{का}^2}{२\,\text{खा}\,.\,\text{गा}}, \quad \text{कोज्या ख} = \frac{\text{गा}^2 + \text{का}^2 - \text{खा}^2}{२\,\text{गा}\,.\,\text{का}}$$

$$\text{और कोज्या ग} = \frac{\text{का}^2 + \text{खा}^2 - \text{गा}^2}{२\,\text{का}\,.\,\text{खा}}$$

इन तीनों सूत्रों में से किन्हीं दो से दो कोणों का मान निकाला जा सकता है। तीसरा कोण उन दोनों के योगफल को १८०° में से घटा कर निकाला जा सकता है। व्यवहार में इन सूत्रों का अधिक प्रयोग नहीं होता है क्योंकि इनकी लघुगणकीय गणनायें बहुत ही असुविधाजनक एवं अनुपयुक्त होती हैं। इनका प्रयोग केवल तभी उपयोगी है जब कि भुजायें छोटी हों। अतः अधिकतर निम्नलिखित सूत्रों का प्रयोग होता है।

$$\text{स्प}\,\frac{\text{क}}{२} = \sqrt{\frac{(\text{अ} - \text{खा})(\text{अ} - \text{गा})}{\text{अ}(\text{अ} - \text{का})}}$$

$$\text{स्प}\,\frac{\text{ख}}{२} = \sqrt{\frac{(\text{अ} - \text{का})(\text{अ} - \text{गा})}{\text{अ}(\text{अ} - \text{खा})}}$$

$$\text{स्प}\,\frac{\text{ग}}{२} = \sqrt{\frac{(\text{अ} - \text{का})(\text{अ} - \text{खा})}{\text{अ}(\text{अ} - \text{गा})}}$$

इनमें से कोई से दो सूत्रों को लेकर दो कोण निकाले जा सकते हैं। तीसरा कोण १८०° में से दोनों के योग को घटा कर आ जायगा। ये सूत्र लघुगणकों (logs) की गणना के लिये बहुत ही सुविधा जनक हैं। कहीं कहीं अर्द्ध कोणों के ज्या अथवा कोज्या के सूत्र भी प्रयोग में लाये जाते हैं।

(१३४) उदाहरण—उस त्रिभुज का सबसे बड़ा कोण बताओ जिसकी भुजायें ५, ६, ७ हों जब कि

लघु ६ = . ७७८१५१३

सालघु कोज्या ३९° १४′ = ९ . ८८९०६४४

१′ के लिये अन्तर = १०३२ हो।

(उत्तर प्रदेश १९२६, १९४४, राजपूताना १९३८, पटना १९३८)

$$\text{अ} = \frac{\text{का} + \text{खा} + \text{गा}}{२} = \frac{१}{२}(५ + ६ + ७) = ९$$

हम जानते हैं कि

$$\text{कोज्या}\ \frac{\text{ग}}{२} = \sqrt{\frac{\text{अ}\ (\text{अ} - \text{गा})}{\text{का}\ .\ \text{खा}}}$$

$$= \sqrt{\frac{९\ (९ - ७)}{५\ .\ ६}}$$

$$= \sqrt{\tfrac{३}{५}}$$

$$\text{सालघु कोज्या}\ \frac{\text{ग}}{२} = १० + \frac{१}{२}\ \text{लघु}\ \frac{३}{५}$$

$$= १० + \frac{१}{२}\ \text{लघु}\ \frac{६}{१०}$$

$$= १० + \frac{१}{२}\ [\text{लघु}\ ६ - \text{लघु}\ १०]$$

$$= १० + \frac{१}{२}\ [\cdot ७७८१५१३ - १]$$

$$= ११ - .११०९२४३$$

$$= ९\ .\ ८८९०७५७$$

किन्तु हमें ज्ञात है कि

सालघु कोज्या ३९°१४′ = ९ . ८८९०६४४

$$\therefore\ \text{सालघु कोज्या}\ \frac{\text{ग}}{२} - \text{सालघु कोज्या}\ ३९°१४'$$

$$= \cdot ०००० ११३$$

चूँकि ·०००१०३२ अन्तर ६०″ पर होता है

$\therefore$ ·००००११३ „ $= \frac{६० \times ११३}{१०३२}$ „ „

$= ६''$ (निकटतम)

चूँकि लालघु कोज्या $\frac{ग}{२}$, लालघु ३६°१४′ से बड़ा है अतः $\frac{ग}{२}$, ३६°१४′ से छोटा है क्योंकि $\frac{ग}{२}$ प्रथम पाद में है।

$\therefore \frac{ग}{२} = ३६°१४' - ६''$

$= ३६°१३'\ ५४''$

$\therefore ग = ७८°२७'\ ४८''$

यही सबसे बड़ा कोण है।

अभ्यास २३

त्रिभुज के कोणों को ज्ञात करो जब कि उसकी भुजायें

(१) $२, \sqrt{६}, \sqrt{३} - १$ हों

(२) $३\sqrt{२} - २\sqrt{३}, २, २\sqrt{३} - २$ हों

(३) $\sqrt{३} - १, \sqrt{३} + १, २\sqrt{२}$ हों

(४) यदि त्रिभुज की भजायें $य^२ + य + १$, $२ य + १$, $य^२ - १$ हो तो सिद्ध करो कि सबसे बड़ा कोण १२०° होगा।

(५) यदि भुजाओं का अनुपात $१ : २ : \sqrt{७}$ हो तो महत्तम कोण निकालो।

(६) उस त्रिभुज का सबसे बड़ा कोण बताओ जिसकी भुजायें २, ३, ४ हों जब कि—

लघु २ = ·३०१०३ , लघु ३ = ·४७७१२१३

सालघु स्प ५२°१४′ = १०·११०८३६५ ,

सालघु स्प ५२°१५′ = १०·११११००४

(कलकत्ता १६२०, दिल्ली १६४०)

(७) त्रिभुज क ख ग में का = ६, खा = १०, गा = ११ हो तो कोण ख बताओ जबकि—

लघु २ = ·३०१०३

सालघु स्र २६°२६′ = ६·७५२३४७२,

सालघु स्र २६°३०′ = ६·७५२६४२०

(८) किसी त्रिभुज की भुजायें ३२, ४०, ६६ हैं ; महत्तम कोण निकालो जब कि—

लघु २०७ = २·३१५६७०३, लघु १०७३ = ३·३०५६६७

सालघु कोस्र ५६°१८′ = ६·६४२४३४२,

अन्तर १′ = ·०००३४३१

(९) किसी त्रिभुज की भुजायें ११ : १३ : १६ की निष्पत्ति में हैं लघुतम कोण ज्ञात करो जबकि—

लघु ७ = ·८४५०६८०, सालघु स्प २१°३१′

= ६·५६५७६७६, १′ के लिये अन्तर ३७०१

(१०) यदि किसी त्रिभुज में का, खा, गा के मान क्रमशः ४, ५, ६ हों तो कोण ख को ज्ञात करो जबकि यह दिया हुआ है—

लघु २ = ·३०१०३००

सालघु कोज्या २७°५३′ = ६·६४६४०४०,

सालघुकोज्या २७°५४′ = ६·६४६३३७१ (उत्तर प्रदेश १६४६)

(११) उस त्रिभुज को निर्धारित करो जिसकी भुजायें २६७, ३५१, ४३२ हों जब कि

लघु २ = ·३०१०३०० सालघु कोस्प २१°३१′ = १०·४०४२१२१

लघु ३ = ·४७७१२१३ सालघु कोस्प २१°३२′ = १०·४०३८१२०

लघु ७ = ·८४५०९८० सालघु कोस्प ४१°३६′ = १०·०५१६६४५

सालघु कोस्प ४१°३५′ = १०·०५११९६०

(उत्तर प्रदेश १९३२)

(१२) किसी त्रिभुज की भुजायें ५०, ३६, २८ हैं तो महत्तम कोण ज्ञात करो जब कि

लघु १९ = १·२७८७५३६

लघु २९ = १·४६२३९८०

सालघु स्प ५१° = १०·०९१६३०८,

सालघु स्प ५१°१′ = १०·०९१८८९ (कलकत्ता १९०९)

(१३) उस त्रिभुज का सबसे छोटा कोण बताओ जिसकी भुजायें क्रमशः ४, ७, ९ हो जब कि

लघु २ = ·३०१०३००

सालघु स्प १८°१९′ = ९·३४९३२९

१′ का अन्तर = ५९३ (राजपूताना १९४०)

(१०) त्रिभुज क ख ग में का = ४३ खा = ५०, गा = ५७ हो तो कोण ख बताओ जब कि

लघु २ = ·३०१०३००, लघु ३ = ·४७७१२१३

सालघु स्प २८°५९′ = ९·७४३४५४०

सालघु स्प २९° = ९·७४३७५२० (उत्तर प्रदेश १९३७)

(१५) एक त्रिभुज की भुजायें १५, १९, २४ हैं तो सब से बड़ा कोण ज्ञात करो जब कि

लघु ५·७ = ·७५५८७

सालघु कोज्या ८८°५९′ = ८·२४९०३

१′ का अन्तर = ७१८ (कलकत्ता १९३९)

(१६) किसी त्रिभुज की भुजायें ७,८,९ हैं तो सभी कोणों को ज्ञात करो जब कि

लघु २ = ०·३०१०३००

सालघु स्प २४°५′४०″ = ९·६५०५०६९

सालघु स्प २४°५′५०″ = ९·६५०५६३४

सालघु स्प २९°१२′२०″ = ९·७४७४१८३

सालघु स्प २९°१२′३०″ = ९·७४७४६७७ (कलकत्ता १९३८)

(१७) सारिणी का प्रयोग करके उस त्रिभुज को निर्धारित करो जिसकी भुजायें ५२५ फीट, ६१० फीट, ७७७ फीट हों।

स्थिति २

(१३५) जब दो भुजायें [खा, गा] और उनके बीच का कोण [क] ज्ञात हो,

चूँकि क दिया हुआ है।

अतः ∠ख + ∠ग = १८०° − क

$$\therefore \frac{ख+ग}{२} = ९०° - \frac{क}{२} \quad \cdots\cdots\cdots (१)$$

दोनों भुजाओं में से मान लो गा बड़ी है, तो

$$स्प\ \frac{ख-ग}{२} = \frac{खा-गा}{खा+गा}\ कोस्प\ \frac{क}{२}$$

$$\therefore सा\ लघु\ स्प \frac{ख-ग}{२} = लघु\ (खा-गा) - लघु\ (खा+गा)$$

$$+\ सालघु\ कोस्प\ \frac{क}{२} \cdots\cdots\cdots (२)$$

अतः (१) और (२) से हमें $\frac{ख+ग}{२}$ एवं $\frac{ख-ग}{२}$ के मान प्राप्त

हो जाते हैं जिनके जोड़ने और घटाने से ख और ग ज्ञात हो जायँगे।

का निकालने के लिये इस सूत्र का प्रयोग करते हैं:—

$$\frac{\text{का}}{\text{ज्या क}} = \frac{\text{खा}}{\text{ज्या ख}} \quad \text{या} \quad \frac{\text{का}}{\text{ज्या क}} = \frac{\text{गा}}{\text{ज्या ग}}$$

जिससे

लघु का = लघु खा + सालघु ज्या क − सालघु ज्या ख

या लघु का = लघु गा + सालघु ज्या क − सालघु ज्य ग

का इन सूत्रों से भी निकाला जा सकता है—

$$\text{का}^2 = \text{खा}^2 + \text{गा}^2 - 2\ \text{खा गा कोज्या क} \quad \text{......... (अ)}$$

$$\text{या का} = \frac{(\text{खा} - \text{गा})\ \text{कोज्या}\ \frac{\text{क}}{2}}{\text{ज्या}\ \frac{\text{ख} - \text{ग}}{2}} \quad \text{.............. (आ)}$$

$$\text{या का} = \frac{(\text{खा} + \text{गा})\ \text{ज्या}\ \frac{\text{क}}{2}}{\text{कोज्या}\ \frac{\text{ख} - \text{ग}}{2}} \quad \text{.............. (इ)}$$

(१३६) जब केवल भुजा का मालूम करनी हो तो बिना कोण ख और ग को ज्ञात किये वह इन सूत्रों द्वारा स्वतन्त्र रीति से मालूम की जा सकती है—

$$\text{का}^2 = \text{खा}^2 + \text{गा}^2 - 2\ \text{खा . गा कोज्या क}$$

$$= \text{खा}^2 + \text{गा}^2 - 2\ \text{खा . गा} \left(1 - 2\ \text{ज्या}^2 \frac{\text{क}}{2}\right)$$

$$= (\text{खा} - \text{गा})^2 + 4\ \text{खा . गा ज्या}^2 \frac{\text{क}}{2}$$

$$= (\text{खा} - \text{गा})^2 \left\{1 + \frac{4\ \text{खा गा}}{(\text{खा} - \text{गा})^2}\ \text{ज्या}^2 \frac{\text{क}}{2}\right\}$$

अब चूँकि किसी कोण का स्प किसी भी परिमाण का हो सकता है इसलिये मान लो कि

$$\text{स्प}^2\ \text{थ} = \frac{४\ \text{खा}\cdot\text{गा}}{(\text{खा}-\text{गा})^2}\ \text{ज्या}^2\frac{\text{क}}{२}$$

$$\text{या स्प थ} = \frac{२\sqrt{\text{खा गा}}}{\text{खा}-\text{गा}}\ \text{ज्या}\ \frac{\text{क}}{२}$$

$$\text{अतः का}^2 = (\text{खा}-\text{गा})^2\{१+\text{स्प}^2\ \text{थ}\}$$

$$= (\text{खा}-\text{गा})^2\ \text{व्युको}^2\ \text{थ}$$

$$\therefore \text{का} = (\text{खा}-\text{गा})\ \text{व्युको थ}$$

यहाँ पर कोण थ के प्रयोग का अभिप्राय ऊपर जैसे त्रिकोणमितीय व्यञ्जकों (expressions) में ऐसा परिवर्त्तन करना है, कि वे लघुगणकीय गणना के उपयुक्त हो जायँ। इसका प्रयोग केवल गणना के लिए हुआ है। बहुधा कोण थ को सहायक (Subsidiary) कोण कहा जाता है।

(१३७) उदाहरण १—यदि खा $= \sqrt{३}$, गा $= १$ और कोण क $= ३०^\circ$ हो तो त्रिभुज को निर्धारित करो।

हम जानते हैं कि

$$\text{स्प}\ \frac{\text{ख}-\text{ग}}{२} = \frac{\text{खा}-\text{गा}}{\text{खा}+\text{गा}}\ \text{कोस्प}\ \frac{\text{क}}{२}$$

$$= \frac{\sqrt{३}-१}{\sqrt{३}+१}\ \text{कोस्प}\ १५^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{३}-१}{\sqrt{३}+१}\cdot\frac{\sqrt{३}+१}{\sqrt{३}-१}$$

$$\therefore \text{स्प}\ \frac{\text{ख}-\text{ग}}{२} = १$$

$$\frac{ख - ग}{२} = ४५^\circ \quad\text{..............................}(१)$$

किन्तु $$\frac{ख + ग}{२} = ६०^\circ - \frac{क}{२} = ६० - १५^\circ$$

$$= ७५^\circ \quad\text{..............................}(२)$$

$\therefore$ (१) और (२) से ख = १२०°, ग = ३०°

चूँकि $\angle$क = $\angle$ग

का = गा = १

उदाहरण २—यदि त्रिभुज क ख ग में क ख = १४००,

क ग = १३०० और कोण क = ६०° हो तो $\angle$ ख

और $\angle$ ग ज्ञात करो जब कि

लघु ३ = ·४७७१२१३

सालघु स्प ३°४०′ = ८·८०६७४२२

१०″का अन्तर = ३३०६ (उत्तर प्रदेश १६३०)

हम जानते हैं कि

$$स्प \frac{ख - ग}{२} = \frac{खा - गा}{खा + गा} कोस्प \frac{क}{२}$$

$$= \frac{१३०० - १४००}{१३०० + १४००} कोस्प ३०^\circ$$

$$= - \frac{१}{२७} कोस्प ३०^\circ$$

या $$स्प \frac{ग - ख}{२} = \frac{\sqrt{३}}{२७}$$

$$सालघु स्प \frac{ग - ख}{२} = १० + \tfrac{१}{२} लघु ३ - ३ लघु ३$$

$$= १० - \frac{५}{२} \text{ लघु } ३$$

$$= १० - \frac{५}{२} [\ ·४७७१२१३\ ]$$

$$= ८·८०७१९६७$$

दिया हुआ है कि

$$\text{सालघु स्प } ३^\circ\ ४०' = ८·८०६७४२२$$

$$\therefore \text{ सालघु स्प } \frac{ग - ख}{२} - \text{सालघु } ३^\circ ४०' = ·०००४५४५$$

चूँकि ·०००३३०६ अन्तर $१०''$ पर है

$$\therefore ·०००४५४५ \text{ अन्तर } \frac{१० \times ४५४५}{३३०६} \text{ पर है}$$

$$= १४''$$

$$\text{अतः } \frac{ग - ख}{२} = ३^\circ ४०'\ १४''$$

$$ग - ख = ७^\circ २०' २८'' \cdots\cdots\cdots\cdots (१)$$

$$\text{किन्तु } ग + ख = १८०^\circ - क = १२०^\circ \cdots\cdots\cdots (२)$$

(१) और (२) से

$$ग = ६३^\circ\ ४०'\ १४''$$

$$ख = ५६^\circ\ १९'\ ४६''$$

अभ्यास २४

(१) यदि का $= २$, खा $= \sqrt{३} + १$, ग $= ६०^\circ$ हो तो त्रिभुज को निर्धारित करो।

(२) यदि का $= २$, खा $= ४$, ग $= ६०^\circ$, कोण क और ख बताओ।

(३) यदि खा $= १$, गा $= \sqrt{३} - १$, क $= ६०^\circ$ तो का की लम्बाई बताओ।

(४) एक त्रिभुज की दो भुजायें $\sqrt{३} + १$ तथा $\sqrt{३} - १$ हैं; यदि उनके बीच का कोण ६०° हो तो शेष कोण और भुजायें बताओ।

(५) यदि स्प थ $= \dfrac{\text{का} - \text{खा}}{\text{का} + \text{खा}}$ कोस्प $\dfrac{\text{ग}}{२}$

सिद्ध करो कि

$$\text{गा} = (\text{का} + \text{खा}) \frac{\text{ज्या} \frac{\text{ग}}{२}}{\text{कोज्या थ}}$$

(६) एक त्रिभुज की दो भुजायें क्रमशः १४ से० मी० और ११ से० मी० हैं तथा उनके बीच का कोण ६०° है, तो शेष कोणों को बताओ जब कि

सालघु स्प ११° ४४′ २६″ = ६·३१७७४

लघु २ = ·३०१०३

लघु ३ = ·४७७१२

(राजपूताना १६३६, १६४४, कलकत्ता १६२२)

(७) उस त्रिभुज के शेष कोणों को बताओ जिसकी खा और गा भुजायें क्रमशः ६·५ और ·५ हैं तथा कोण क = १४४° है जब कि

लघु ३ = ·४७७१२१३, सालघु कोस्प ७२° = ६·५११७७६०

सालघु स्प १६°१६′ = ६·४६६४७६५, सालघु स्प १६°१८′ = ६·४६६००७८

(उत्तर प्रदेश १६३१)

(८) किसी त्रिभुज की दो भुजायें क्रमशः ७ फीट तथा ८ फीट हैं, उनके बीच का कोण २२° है तो शेष कोणों को बताओ जब कि

लघु १५ = १·११४६१६१३, सालघु कोस्प ११° = १०·७११३४७७

सालघु स्प १८°५५″ = ६·५३०६१६१, १′ के लिए अन्तर = ·०००४११७

(दिल्ली १६४१, कलकत्ता १८७२)

(९) किसी त्रिभुज की खा और गा भुजाओं में ७ और ३ की निष्पत्ति है, और अन्तर्गत कोण (included) कोण क ६०° है तो कोण ख और ग ज्ञात करो जब कि

लघु २ = ·३०१०३०० लघु ३ = ·४७७१२१३

सालघु स्प ३४°४२′ = ९·८४०३७७६

१′ के लिए अन्तर = २६९९ (उत्तर प्रदेश १९४०)

(१०) एक त्रिभुज की भुजायें ६५ एवं २५ हैं। यदि उनके सम्मुख कोणों का अन्तर ६०° हो तो सभी कोणों को ज्ञात करो जब कि

लघु २ = ·३०१०३००, लघु ३ = ·४७७१२१३

सालघु कोस्प २७°३५′ = १०.११३७१२२

सालघु कोस्प २७°३६′ = १०.११३४५०८

(उत्तर प्रदेश १९४२, राजपूताना १९४५)

(११) एक त्रिभुज में खा = २·२५, गा = १·७५, कोण क = ५४° हो तो कोण ख और ग ज्ञात करो जब कि

लघु २ = ·३०१०३००, सालघु स्प ६३° = १०.२९२८३४

सालघु स्प १३°४७′ = ९·३८९६२४, सालघु स्प १३°४८′ = ९·३९०२७० (कलकत्ता १९३१)

(१२) किसी त्रिभुज की दो भुजाओं की निष्पत्ति ६:७ है और उनके बीच का कोण ४७° २५′ है। शेष कोणों को बताओ जबकि लघु २ = ·३०१०३००, सालघु स्प ६६°१७′३०″ = १०·३५७३६४२ सालघु स्प १५° ५३′ = ९·४५४१४७९, १′ का अन्तर = ·००० ४७ ६७

(उत्तर प्रदेश १९४३, राजपूताना १९४१)

(१३) यदि किसी त्रिभुज में का = ७०, खा = ३५, कोण ग = ३६° ५२′ १२″ तो शेष कोणों को ज्ञात करो जबकि

लघु ३ = '४७७१२१३

सा लघु कोस्र १८° २६′ ६″ = १०·४७७ १ : १३

(कलकत्ता १६३५ , १६३७)

(१४) किसी त्रिभुज के कोण समान्तर श्रेणी (A. P.) में हैं। उसकी सबसे बड़ी और सबसे छोटी भुजा में ५:४ की निष्पत्ति है तो कोणों को बताओ जबकि

लघु ३ = '४७७१२१३

सा लघु स्प १०° ५३′ = ६·२८३६०७०

६०″ के लिए अन्तर = '०००६८०८

(उत्तर प्रदेश १६३४)

(१५) यदि का = २ खा और ग = १२०° हो तो कोण क और ख एव $\frac{\text{गा}}{\text{का}}$ का मान ज्ञात करो जब कि

लघु ३ = '४७७१२१३

सा लघु स्प १०° ५३′ = ६·२८३६०७०

१′ के लिए अन्तर = ६८०८

(१६) किसी त्रिभुज के कोण समान्तर श्रेणी (A. P.) में हैं। सब से बड़ी और सब से छोटी भुजाएं क्रमश: २४ और १६ हैं। तीसरी भुजा और कोणों को ज्ञात करो जब कि

लघु २ = '३०१०३ लघु ३ = '४७७१२१३

सा लघु स्प १६° ६′ = ६·५३६४२८७, १′ के लिए अन्तर = ४०८४

(राजपूताना १६४२)

(१७) यदि किसी त्रिभुज में खा = १३१, गा = ७२, कोण क = ४०° हों तो ख और ग बताओ जब कि

लघु ५·६ = '७७०८५२०

लघु २·०३ = ·३०७४६६०

सालघु स्प ३८°३६′ = ९·९०२१६०४

१′ के लिए अन्तर = ·०००२५६१

सालघु कोस्प २०° = १०·४३८६३४१

(उत्तर प्रदेश १९३८)

(१८) यदि किसी त्रिभुज में खा = ५४०, गा = ४२० और क = ५२°६′ हो तो कोण ख और ग ज्ञात करो जब कि

सालघु स्प २६°३′ = ९·६८९१४३०

सालघु स्प १४°२०′ = ९·४०७४१८९

सालघु स्प १४°२१′ = ९·४०७९४५३

(कलकत्ता १९१८, १९३४)

(१९) यदि किसी त्रिभुज में खा = २·५ फी०, गा = २ फी० और ∠क = २२°२०′ तो शेष कोणों को बताओ और यह भी दिखाओ कि तीसरी भुजा लगभग १ फुट है जब कि

लघु २ = ·३०१०३ लघु ३ = ·४७७१२

सालघु कोस्प ११°१०′ = १०·७०४६५,

सालघु ज्या २२°२०′ = ९·५७९७७

सालघु स्प २९°२२′२०″ = ९·७५०३८,

सालघु स्प २९°२२′३०″ = ९·७५०४३

सालघु ज्या ४९°२७′३४″ = ९·८८०७९

(२०) किसी त्रिभुज में खा = १३१, गा = ९७, ∠क = ४३°, कोण ख और ग ज्ञात करो जब कि

लघु ३·७ = ·५६८२०१७, लघु २·३२ = ·३६३६१२

सालघु कोस्प २१°३०′ = १०·४०४६०२५

सालघु स्प २२°७′ = ९·६०८९५०३,

सालघु स्प २२°८′ = ९·६०९३१२४ (कलकत्ता १८८५)

(२१) किसी त्रिभुज में का = ३·१३६८५८, खा = ·८६०१४५, ग = ५६°२१′३६″; क और ख मालूम करो, जब कि

लघु ५६६६२ = ४·७५५८१३६ लघु ५६६६३ = ४·७५५८२१५
सालघु कोस्प २६°४०′ = १०·२४४१५४,
सालघु कोस्प २६°४१′ = १०·२४४१२१७

(२२) एक त्रिभुज की भुजायें ६ और ३ हैं। उनके सामने के कोणों का अन्तर एक समकोण है तो त्रिभुज को निर्धारित करो जब कि

लघु २ = ·३०१०३ सालघु स्प २६° ३३′ = ६·६६८६८४७
सालघु स्प २६°३४′=६·६६६००६

स्थिति ३

(१३८) जब एक भुजा [का] और दो कोण [ख, ग] ज्ञात हों——

चूँकि त्रिभुज के तीनों कोणों का योग दो समकोण होता है, अतः दो कोणों के ज्ञात होने के कारण तीसरा भी ज्ञात हो जायगा।

भुजाएँ खा और गा निम्न सूत्र से ज्ञात हो सकती हैं

$$\frac{\text{का}}{\text{ज्या क}} = \frac{\text{खा}}{\text{ज्या ख}} = \frac{\text{गा}}{\text{ज्या ग}}$$

$$\text{अर्थात्}\quad \text{खा} = \text{का}\,\frac{\text{ज्या ख}}{\text{ज्या क}},\quad \text{गा} = \text{का}\,\frac{\text{ज्या ग}}{\text{ज्या क}}$$

अर्थात् लघु खा = लघु का + सालघु ज्या ख − सालघु ज्या क
तथा लघु गा = लघु का + सालघु ज्या ग − सालघु ज्या क

(१३६) उदाहरण १—यदि का = १६, ख = ५२°२८′ और ग = ६३°४०′, खा का मान बताओ जबकि लघु १६ = १·२७८७५३६, लघु २७०३७ = ४·४३१६५८१, लघु २७०३८ = ४·४३१६७४६,

सालघु ज्या ५२°२८′ = ९.८९९२७२७, सालघु ज्या ३३°५२′ = ९.७४६०५९५। (कलकत्ता १८७७, पटना १९३६ पूरक)

$$ख + ग = ५२°२८′ + ९३°४०′ = १४६°८′$$

$$क = १८०° - (ख + ग) = ३३°५२′$$

$$\frac{खा}{ज्या ख} = \frac{का}{ज्या क} \quad अर्थात् \quad खा = का \frac{ज्या ख}{ज्या क}$$

$$\therefore लघु\ खा = लघु\ का + सालघु\ ज्या\ ख - सालघु\ ज्या\ क$$
$$= लघु\ १९ + सालघु\ ज्या\ ५२°२८′ - सालघु\ ज्या\ ३३°५२′$$
$$= १.२७८७५३६ + ९.८९९२७२७ - ९.७४६०५९५$$
$$= १.४३१९६६८$$

किन्तु दिया हुआ है कि लघु २७.०३७ = १.४३१९५८५

और लघु २७.०३८ = १.४३१९७४६

.००१ के लिए अन्तर = .०००० १६१

लघु खा − लघु २७.०३७ = .००००० ८३

$$\therefore खा\ के\ मान\ में\ वृद्धि = \frac{८३}{१६१} \times .००१ = .०००५$$

$$अतः \quad खा = २७.०३७ + .०००५$$
$$= २७.०३७५$$

उदाहरण २—यदि $क = ४१°१३′२२″$, $ख = ७१°१९′५″$ और का = ५५ हो तो खा ज्ञात करो जबकि

लघु ५५ = १.७४०३६२७

लघु ७९०९३ = ४.८९८१७७५

सालघु ज्या ४१°१३′२२″ = ९.८१८८७७९

सालघु ज्या ७१°१९′५″ = ९.९७६४९२७

हम जानते हैं कि

$$\frac{\text{खा}}{\text{ज्या ख}} = \frac{\text{का}}{\text{ज्या क}}$$

$$\therefore \quad \text{खा} = \text{का} \frac{\text{ज्या ख}}{\text{ज्या क}}$$

$$\begin{aligned}
\text{लघु खा} &= \text{लघु का} + \text{लघु ज्या ख} - \text{लघु ज्या क} \\
&= \text{लघु ५५} + \text{सालघु ज्या ७१}^\circ\text{१९}'\text{५}'' \\
&\quad - \text{सालघु ज्या ४१}^\circ\text{१३}'\text{२२}'' \\
&= \text{१·७४०३६२७} + \text{९·९७६४९२७} \\
&\quad - \text{९·८१८८७७९} \\
&= \text{१·८९७९७७५} \\
&= \text{लघु ७९·०६३}
\end{aligned}$$

$$\therefore \text{खा} = \text{७९·०६३}$$

स्थिति ४

(१४०) जब तीनों कोण [क, ख, ग] ज्ञात हों—

तीनों कोण दिये जाने पर त्रिभुज को पूर्णरूप से निर्धारित नहीं किया जा सकता। इस स्थिति में निम्न सूत्रों से केवल भुजाओं की पारस्परिक निष्पत्ति ही ज्ञात हो सकती है—

$$\frac{\text{का}}{\text{ज्या क}} = \frac{\text{खा}}{\text{ज्या ख}} = \frac{\text{गा}}{\text{ज्या ग}}$$

(१४१) उदाहरण १—किसी त्रिभुज के कोण १८°, ३६° एवं १२६° हैं तो सिद्ध करो कि सबसे बड़ी भुजा और सबसे छोटी भुजा में ३ + √५ : २ की निष्पत्ति है।

चूँकि $$\frac{\text{गा}}{\text{ज्या ग}} = \frac{\text{का}}{\text{ज्या क}}$$

$$\therefore \quad \frac{\text{गा}}{\text{का}} = \frac{\text{ज्या ग}}{\text{ज्या क}} = \frac{\text{ज्या } १२६^\circ}{\text{ज्या } १८^\circ}$$

$$= \frac{\text{ज्या } (९०^\circ + ३६^\circ)}{\text{ज्या } १८^\circ} = \frac{\text{कोज्या } ३६^\circ}{\text{ज्या } १८^\circ}$$

$$= \frac{\sqrt{५}+१}{\sqrt{५}-१} = \frac{(\sqrt{५}+१)(\sqrt{५}+१)}{(\sqrt{५}-१)(\sqrt{५}+१)}$$

$$= \frac{६+२\sqrt{५}}{४} = \frac{३+\sqrt{५}}{२}$$

अभ्यास २५

(१) क = ७५°, ख = ३०°, खा = $\sqrt{८}$ तो त्रिभुज को निर्धारित करो।

(२) ख = ६०°, ग = ४५°, गा = ६ तो खा एवं क को ज्ञात करो।

(३) किसी त्रिभुज में कोण क = ४५°, ग = १०° और का = २०० फी० हो तो खा बताओ जब कि

लघु २ = ·३०१०३, सालघु ज्या ५५° = ९.९१३३६४५

लघु १७२६·४ = ३·२३७१४१४, लघु १७२६·५ = ३·२३७१६६६

(कलकत्ता १९१७, पटना १९३६, १९४०)

(४) किसी त्रिभुज में भुजा का = १०, कोण क = ५१°३०′४०″, ∠ख = ७६° तो खा बताओ जब कि

लघु १२३९६ = ४·०९३२८१६

लघु १२३९७ = ४·०९३३१६६

सालघु ज्या ७६° = ९·९८६९०४१

सालघु ज्या ५१°३०′ = ९·८९३५४४४

सालघु ज्या ५१°३१′ = ९·८९३६४४८

(उत्तर प्रदेश १९४९)

(५) क ख ग त्रिभुज में का = २२६.६ ∠ ख = ७३°३५′, ∠ग = ३६°४५′ तो उस त्रिभुज को निर्धारित करो जबकि

लघु २२६६ = ४.३५५८, लघु २३७ = २.३७४८

सालघु ज्या ७३°३५′ = ६.६८१६,

सालघु ज्या ६६°४०′ = ६.६६०६

(६) ख और ग दो स्थानों से, जिनकी एक दूसरे से दूरी ४४०० गज है, एक स्थान क देखने पर कोण क ख ग और कोण क ग घ क्रमशः ६८° और ७२° पाये गये हैं तो क की ख से दूरी बताओ जब कि

लघु ४.४ = .६४३५

लघु ६.५१ = .८१३६

सालघु ज्या ७२° = ६.६७८२, लघु व्युको ४०° = .१६१६

(उत्तरप्रदेश १६४७)

(७) यदि ख = ७०°३०′, ग = ७८°१०′ और का = १०२ तो त्रिभुज को निर्धारित करो जब कि

लघु १.२ = २.००६. लघु १८५ = २.२६७

लघु .०१६२ = $\bar{2}$.२८३, सालघु ज्या ७०°३०′ = ६.६७४

सालघु ज्या ३१°२०′ = ६.७१६,

सालघु ज्या ७८°१०′ = ६.६६०

(८) किसी त्रिभुज के आधार के कोण २२½° और ११२½° हैं सिद्ध करो कि उसका आधार उसकी ऊँचाई से दूना है।

(६) यदि खा = २.२५, गा = १.७५ क = ५४° हो तो ख और ग बताओ जब कि

लघु २ = .३०१०३०, सालघु स्प ६३° = १०.२६२८३४

सालघु स्प १३°४७′ = ६.३८६७२४,

सालघु स्प १३°४८′ = ६.३६०२७० (कलकत्ता १६३१)

(१०) यदि क = ४५°, ख = ६६° ४२′२०″, खा = १०००; का का मान ज्ञात करो जब कि

लघु २ = ·३०१०३००, लघु ७·६६८६२२ = ·८८६४१३१

सालघु ज्या ६६°४२′ = ६·६६३०५३८,

१′ के लिए अन्तर = ५४४ (कलकत्ता १६०८)

(११) यदि का = ३४५, ख = ४७°३२′ और ग = ५५°२६′, खा और गा का मान बताओ जब कि

सालघु ज्या ४७°३२′ = ६·८६७८६२३, लघु ३४५ = २·५३७८८६१

सालघु ज्या ५५°२६′ = ६·६१५६०६६,

लघु २६१७६ = ४·४६५०२५८

१′ के लिए अन्तर = १६८

सालघु ज्या ७६°५६′ = ६·६८८६६४७,

लघु २६१२० = ४·४१६६७३२

१′ के लिये अन्तर = १६८

(१२) किसी त्रिभुज के कोण ४०° ६०°, ८०° हैं। यदि सब से बड़ी भुजा १२ फी० हो तो सब से छोटी भुजा को ज्ञात करो जब कि

सालघु ज्या ४०° = ६·८०८०६७५,

सालघु ज्या ८०° = ६·६६३३५१५

लघु २२ = १·३४२४२२७, लघु १४३५६ = ४·१५७१२४२

१′ के लिये अन्तर = ·००००३०

स्थिति ५

(१४२) जब दो भुजायें [खा, गा] और एक सम्मुख कोण [ख] ज्ञात हो—

चूँकि $\frac{\text{ज्या ग}}{\text{गा}} = \frac{\text{ज्या ख}}{\text{खा}}$

$$\therefore \quad \text{ज्या ग} = \frac{\text{गा}}{\text{खा}} \text{ज्या ख} \quad \cdots\cdots \quad (१)$$

अथवा सालघु ज्या ग = लघु गा − लघु खा + सालघु ज्या ख

अतः इस सूत्र से कोण ग ज्ञात हो सकता है

∴ कोण क = (१८०° − ख − ग)

भुजा का निम्नसूत्र से ज्ञात हो सकती है

$$\frac{\text{का}}{\text{ज्या क}} = \frac{\text{खा}}{\text{ज्या ख}}$$

$$\text{अर्थात् का} = \text{खा} \frac{\text{ज्या क}}{\text{ज्या ख}}$$

(१४३) पिछले सूक्त के व्यंजक (१) से पता चलता है कि तीन दशायें उपस्थित हो सकती हैं—

(१) खा < गा ज्या ख—इस दशा में ज्या ग इकाई से बड़ा होगा जो कि असम्भव है क्योंकि किसी भी कोण के ज्या का मान १ से अधिक नहीं होता है। अतः इस दशा में त्रिभुज सम्भावित नहीं है।

(२) खा = गा ज्या ख—इस दशा में ज्या ग = १ अतः ग= ९०°। इसलिये त्रिभुज क ख ग एक समकोण त्रिभुज होगा जिसका ग कोण ९०° है।

(३) खा > गा ज्या ख—इस दशा में ज्या ग १ से कम है अतः कोण ग ज्ञात हो सकता है। अब चूँकि पूरक (supplementary) कोणों के ज्या बराबर होते हैं एवं त्रिभुज का एक कोण न्यून कोण भी हो सकता है तथा अधिक कोण भी, अतः हमें कोण ग के ऐसे दो मान प्राप्त हो सकते हैं जिन दोनों के ज्या के मान बराबर होंगे। ऐसी परिस्थिति में अब तीन अन्य उपदशायें उपस्थित हो सकती हैं—

(अ) यदि खा > गा हो तो कोण ख > कोण ग अतः ग का

अधिक कोण मान ग्राह्य नहीं है क्योंकि ख भी अधिक कोण होगा। किन्तु त्रिभुज के ख और ग दोनों कोण अधिक कोण नहीं हो सकते हैं। इस प्रकार इस दशा में ग का केवल न्यून कोण मान ही ग्राह्य है।

(आ) यदि खा = गा हो तो ख=ग। यहाँ भी ग का अधिक कोण मान अग्राह्य है क्योंकि ख और ग बराबर होने के कारण त्रिभुज के दो कोण अधिक कोण हो जायेंगे जो कि असम्भव है। इस प्रकार इस दशा में भी ग का केवल न्यून कोण मान ही ग्राह्य है।

(इ) यदि खा < गा हो तो ख < ग; अतः $\angle$ ग न्यून कोण अथवा अधिक कोण दोनों ही हो सकता है। यहाँ पर कोण ग के दोनों ही पूरक (Supplementary) मान ग्राह्य है। इस दशा में खा, गा और $\angle$ ख से दो त्रिभुज सम्भव हैं, प्रत्येक त्रिभुज में कोण क भिन्न होगा।

चूँकि खा, गा और $\angle$ ख के मान दिये जाने से यह संशय बना रहता है कि त्रिभुज निश्चयात्मक रूप से बन सकता है या नहीं क्योंकि दिये हुये परिणामों को पूरा करने वाले दो त्रिभुज बन सकते हैं, एक बन सकता है और एक भी नहीं बन सकता है, अतः इस त्रिभुज को **'संशयात्मक'** और इस निर्धारण को **'संशयात्मक स्थिति'** कहते है।

उपर्युक्त फलों को सन्क्षेप में इस प्रकार लिखा जा सकता है, जबकि एक त्रिभुज की खा, गा और $\angle$ ख दिये हों

(१) यदि खा < गा ज्या ख , त्रिभुज असम्भव है

(२) यदि खा = गा ज्या ख , एक समकोण त्रिभुज बनेगा

(३) यदि खा > गा (> गा ज्या ख) केवल एक त्रिभुज सम्भव है जिसका कोण ग न्यून कोण होगा।

(४) यदि खा = गा (> गा ज्या ख) केवल एक त्रिभुज सम्भव है जिसका कोण ग न्यून कोण होगा।

(५) यदि खा > गा ज्या ख किन्तु गा से कम है तो दो त्रिभुज सम्भव हैं।

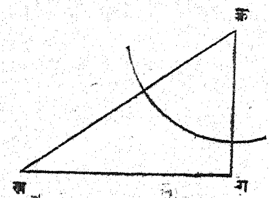
भूमितीय विचार

(Geometrical Treatment)

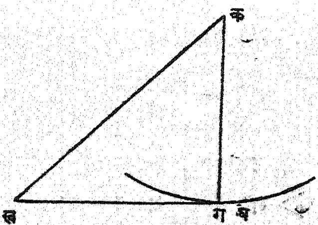
(१४४) क से का भुजा पर क घ एक लम्ब खींचो।

अतः क घ = गा ज्या ख ; क को केन्द्र मानकर खा के बराबर त्रिज्या लेकर एक वृत्त खींचो तो

(१) यदि खा $<$ गा ज्या ख , वृत्त ख ग भुजा को कहीं नहीं काटता है, अतः त्रिभुज नहीं बन सकता



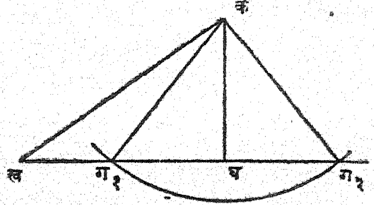
(२) यदि खा = गा ज्या ख, वृत्त ख ग भुजा को स्पर्श करता है अतः इष्ट त्रिभुज समकोण त्रिभुज बनेगा



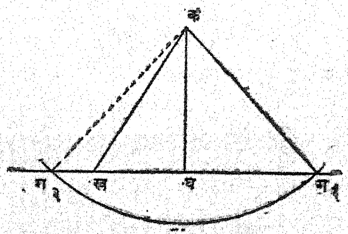
(३) यदि खा $>$ गा ज्या ख , वृत्त ख ग को दो बिन्दुओं ग$_1$ और ग$_2$ पर काटता है

यदि खा $<$ गा , ग$_1$ और ग$_2$ ख के एक ही ओर होंगे अतः इस स्थिति में दो त्रिभुज क ख ग$_1$, क ख ग$_2$ प्राप्त होते हैं, जो दोनों

ही दी हुई शर्तों को पूरा करते हैं और दोनों ही त्रिभुज दिये हुए साध्य के समाधान हैं।



यदि खा > गा, ग१ और ग२ में से एक ख के दाहिनी ओर और दूसरा इसके बाईं ओर होगा। इन दोनों ही स्थितियों में केवल एक ही समाधान क ख ग१ होगा। दूसरा त्रिभुज क ख ग२ इस साध्य का समाधान नहीं क्योंकि कोण क ख ग२, ख के बराबर नहीं वरन् १८०° − ख के बराबर है



बीजगणितीय विचार

(Algebraic Treatment)

(१४५) संशयात्मक स्थिति पर बीजगणित से भी विचार किया जा सकता है

$$\text{खा}^2 = \text{का}^2 + \text{गा}^2 - 2\ \text{का गा कोज्या ख}$$

$$\therefore \text{का}^2 - 2\ \text{का गा कोज्या ख} + \text{गा}^2 - \text{खा}^2 = 0$$

यह का सम्बन्धी द्विघात-समीकरण (Quadratic Equation) है।

$$\therefore \text{का}^2 - 2\,\text{का}\,.\,\text{गा कोज्या ख} + \text{गा}^2\,\text{कोज्या}^2\,\text{ख}$$
$$= \text{खा}^2 - \text{गा}^2 + \text{गा}^2\,\text{कोज्या}^2\,\text{ख}$$
$$= \text{खा}^2 - \text{गा}^2\,\text{ज्या}^2\,\text{ख}$$

$$(\text{का} - \text{गा कोज्या ख})^2 = \text{खा}^2 - \text{गा}^2\,\text{ज्या}^2\,\text{ख}$$

$$\therefore \text{का} - \text{गा कोज्या ख} = \pm\sqrt{\text{खा}^2 - \text{गा}^2\,\text{ज्या}^2\,\text{ख}}$$

$$\text{का} = \text{गा कोज्या ख} \pm \sqrt{\text{खा}^2 - \text{गा}^2\,\text{ज्या}^2\,\text{ख}} \quad \ldots\ (1)$$

अब समीकरण (१) से खा, गा, कोण ख के दिये जाने से क ज्ञात हो सकता है।

(१) यदि खा < गा ज्या ख, संख्या $\sqrt{\text{खा}^2 - \text{गा}^2\,\text{ज्या}^2\,\text{ख}}$ कल्पित (imaginary) है अतः का का कोई वास्तविक मान न होने पर त्रिभुज भी असम्भव है।

(२) यदि खा = गा ज्या ख , संख्या $\sqrt{\text{खा}^2 - \text{गा}^2\,\text{ज्या}^2\,\text{ख}} = 0$

$$\therefore \text{का} = \text{गा कोज्या ख}$$

अतः का के दोनों मूल (roots) समान (equal) होने के कारण केवल एक ही त्रिभुज सम्भव है जो कि समकोण होगा।

(३) यदि खा > गा ज्या ख , का के दो मान हो सकते हैं। किन्तु समाधान के लिये का का मान धनात्मक होना आवश्यक है। अतः वर्गमूल का ऋणात्मक चिह्न केवल तभी ग्राह्य हो सकता है जबकि

$$\text{गा कोज्या ख} - \sqrt{\text{खा}^2 - \text{गा}^2\,\text{ज्या}^2\,\text{ख}} \quad \text{धनात्मक हो}$$

अर्थात् $\sqrt{\text{खा}^2 - \text{गा}^2\,\text{ज्या}^2\,\text{ख}} < \text{गा कोज्या ख}$

अर्थात् $\text{खा}^2 - \text{गा}^2\,\text{ज्या}^2\,\text{ख} < \text{गा}^2\,\text{कोज्या}^2\,\text{ख}$

अर्थात् $\text{खा}^2 < \text{गा}^2\,\text{कोज्या}^2\,\text{ख} + \text{गा}^2\,\text{ज्या}^2\,\text{ख}$

अर्थात् $\text{खा}^2 < \text{गा}^2$

अतः दो त्रिभुज केवल तभी सम्भव हैं जब कि

खा > गा ज्या ख तथा खा < गा

(४) यदि ख एक अधिक कोण है तो गा कोज्या ख ऋणात्मक है और का का मान सदैव ऋणात्मक होगा। अतः वह त्रिभुज नहीं बन सकता।

का का दूसरा मान तभी धनात्मक होगा जब कि

गा कोज्या ख + $\sqrt{\text{खा}^2 - \text{गा}^2 \text{ ज्या}^2 \text{ ख}}$ धनात्मक है

अर्थात् $\sqrt{\text{खा}^2 - \text{गा}^2 \text{ ज्या}^2 \text{ ख}} > -$ गा कोज्या ख

अर्थात् खा^{2} > गा^{2} ज्या^{2} ख + गा^{2} कोज्या^{2} ख

> गा^{2}

अर्थात् खा > गा

अतः ख के अधिक कोण होने पर यदि खा < गा हो तो कोई त्रिभुज नहीं बनेगा और यदि खा > गा तो केवल एक ही त्रिभुज बनेगा।

(१४६) उदाहरण १—संशयात्मक स्थिति में यदि का, खा और क दिये हों तो सिद्ध करो कि कि गा भुजा के दो मानों का अन्तर २$\sqrt{\text{का}^2 - \text{खा}^2 \text{ ज्या}^2 \text{ क}}$ होगा। (उत्तर प्रदेश १९३३, १९४१)

का^{2} = खा^{2} + गा^{2} − २ खा · गा कोज्या क

गा^{2} − २ गा · खा कोज्या क + खा^{2} − का^{2} = ०

गा$_1$ + गा$_2$ = २ खा कोज्या क

गा$_1$ गा$_2$ = खा^{2} − का^{2}

(गा$_1$ − गा$_2$)^2 = (गा$_1$ + गा$_2$)^2 − ४ गा$_1$ गा$_2$

= ४ खा^{2} कोज्या^{2} क − ४ (खा^{2} − का^{2})

= ४ (का^{2} − खा^{2} ज्या^{2} क)

∴ गा$_1$ − गा$_2$ = २$\sqrt{\text{का}^2 - \text{खा}^2 \text{ ज्या}^2 \text{ क}}$

उदाहरण २—संशयात्मक स्थिति में यदि $गा_१$ और $गा_२$ तीसरी भुजा के मान हों और $गा_१^२ + गा_१ गा_२ + गा_२^२ = का^२$ हो तो सिद्ध करो कि

$\angle क = ६०^\circ$ या १२०°।

उदाहरण १ से

$गा_१ + गा_२ = २$ खा कोज्या क, $गा_१ \, गा_२ = खा^२ - का^२$

$$\therefore का^२ = गा_१^२ + गा_१ गा_२ + गा_२^२$$
$$= (गा_१ + गा_२)^२ - गा_१ गा_२$$
$$= ४ \text{ खा}^२ \text{ कोज्या क} - खा^२ + का^२$$

$\therefore$ ४ कोज्या^{२} क = १

कोज्या क = $\pm \frac{१}{२}$

$\therefore \angle क = ६०^\circ$ या १२०°

उदाहरण ३—यदि का = ६४, खा = १०० और कोण ख = ६०° हो तो शेष कोणों को ज्ञात करो जब कि

सालघु ज्या $३३^\circ ३६' = \bar{१}{\cdot}७४३६०२५$

$१'$ का अन्तर = १८६७

लघु २ = ·३०१०३, लघु ३ = ·४७७ १२१३

क्या यह स्थिति संशयात्मक है ?

यहाँ ज्या क = का $\frac{\text{ज्या ख}}{\text{खा}} = \frac{६४}{१००}$ ज्या ६०°

$$= \frac{२^५}{१०^२} \sqrt{३}$$

$\therefore$ लघु ज्या क = ५ लघु २ + $\frac{१}{२}$ लघु ३ − २ लघु १०

$= १\cdot५०५१५ + \cdot २३८५६०६५ - २$

$= -१ + \cdot ७४३७१०६५$

सालघु ज्या क $= \bar{१}\cdot ७४३७१०६५$

$= \bar{१}\cdot ७४३७१०७$

अब इसका सालघु ज्या ३३°३६′ से अन्तर = १०८३

और ६०″ का अन्तर = १८६७

$\therefore$ क = ३३°३६′ य″ जहाँ कि

$\frac{य}{६०} = \frac{१०८३}{१८६७}$ अतः य = ३४·२″

$\therefore$ क = ३३°३६′३४.२″

$\therefore$ ग = १८०° − (३३°३६′३४·२″ + ६०°)

$= ८६°२०′२५·८″$

चूँकि यहाँ का < खा तथा कोण क < कोण ख अतः यह संशयात्मक स्थिति नहीं है। केवल एक ही त्रिभुज सम्भव है।

अभ्यास २६

त्रिभुज निर्धारित करो जब कि—

(१) खा = २, गा = √३ + १ और कोण ख = ४५°

(मैसूर १९४३)

(२) का = १, गा = √२ और ∠ क = ३०°

(३) का = २, खा = √६, ∠ ख = ६०°

(४) कोण ख ज्ञात करो जब कि का = ३, खा = ३√३, ∠ क = ३०°

(५) यदि किसी त्रिभुज में २ खा = ३ का और स्प² क = $\frac{३}{५}$, सिद्ध करो कि तीसरी भुजा के दो मान हैं जिनमें एक दूसरी की दूनी है।

(६) संशयात्मक स्थिति में यदि का, गा और कोण क दिये हों तो सिद्ध करो कि—

(१) $खा_2 - खा_1 = २ का कोज्या ग$ (बनारस १६२८)

(२) $कोज्या \frac{ख_1 - ख_2}{२} = \frac{गा ज्या क}{का}$ (उत्तर प्रदेश १६४१)

(३) $खा_1^2 + खा_2^2 - २ खा_1 खा_2 कोज्या २ क$
$= ४ का^2 कोज्या^2 क$

जब कि का $<$ गा।

(राजपूताना १६४६, बनारस १६३५)

(४) $३ गा = का\sqrt{१ + ८ ज्या^2 ग}$ जब कि $खा_2 = २ खा_1$

(राजपूताना १६४७)

(७) सिद्ध करो कि उस स्थिति में, जिसमें दो निर्धारक हों, ग के दोनों मान नीचे दिये हुये समीकरण को सन्तुष्ट करते हैं।

$$\frac{(का + खा)^2}{१ + कोज्या ग} + \frac{(खा - का)^2}{१ - कोज्या ग} = \frac{२ का^2}{ज्या^2 क}$$

(८) यदि $ख_1$, $ग_1$ और $ख_2$, $ग_2$, संशयात्मक स्थिति में दोनों त्रिभुजों के कोण हों तो सिद्ध करो कि

$$\frac{ज्या ग_1}{ज्या ख_1} + \frac{ज्या ग_2}{ज्या ख_2} = २ कोज्या क$$

(९) संशयात्मक स्थिति में यदि $गा_1$ और $गा_2$ संशयात्मक भुजायें हों और यदि थ, गा की दोनों स्थितियों के बीच का कोण हो तो सिद्ध करो कि

$$स्प थ = \frac{(गा_1^2 - गा_2^2)\, ज्या^2 थ}{२ गा_1 गा_2 - (गा_1^2 + गा_2^2)\, कोज्या २ थ}$$

(१०) संशयात्मक स्थिति में, एक त्रिभुज का क्षेत्रफल दूसरे त्रिभुज

के क्षेत्रफल से स गुना बड़ा है। सिद्ध करो कि यदि दी हुई भुजाओं में से खा बड़ी हो और का छोटी हो तो $\frac{\text{खा}}{\text{का}}$ का मान $\frac{\text{स}+1}{\text{स}-1}$ से न्यून होगा।

(११) किसी त्रिभुज में का = २, गा = ३, सालघु ज्या क = ९.५२२८७८७ हो तो कोण ग बताओ जब कि लघु ३ = ·४७७१२१३

(राजपूताना १९४७)

(१२) यदि का = २०० फी०, गा = २५० फी० $\angle$क = ३०° तो तीसरी भुजा की (छोटी) लम्बाई बताओ जब कि

लघु २ = ·३०१०३, लघु ६·०३८९३ = ·७८०९६०१

सालघु ज्या ३८°४१′ = ९·७९५८८००,

सालघु ज्या ८°४१′ = ९·१७८९००१

(उत्तर प्रदेश १९३६)

(१३) किसी त्रिभुज में का = ७३·४, खा = ६४·९, कोण ख = ४८°१३′२१″ तो कोण क बताओ जब कि

लघु ७३४०० = ४·८६५६९६१

लघु ·००६४९ = $\bar{3}$·८१२२४४७

सालघु ज्या ४८°१३′२५″ = ९·८७२५१३६

सालघु ज्या ५७°३०′ = ९·९२६०२९२

१′ का अन्तर = ८०४

(१४) उस त्रिभुज के शेष कोणों को ज्ञात करो जिसका एक कोण ११२°४′ उसके सामने की भुजा ५७३ फी० तथा दूसरी भुजा ३९४ फीट है जब कि

लघु ५·७३ = ·७५८१५४६ लघु ३·९४ = ·५९५४९९२

सालघु कोज्या २२°४′ = ९·९६६९६१४

सालघु ज्या ३९°३५′ = ९·८०४२७५७

सालघु ज्या २६°३६′ = ६·८०४४२८४

(उत्तर प्रदेश १६३६)

(१५) यदि का = ६, खा = १२ और ∠क = ३०° तो गा और ∠ क एवं ख बताओ जब कि

लघु २ = ·३०१०३, लघु ३ = ·४७७१२

लघु १७१ = २·२३३०१, लघु ३६८ = २·५६६३५

सालघु ज्या ११°४८′३६″ = ६·३११०८

सालघु ज्या ४१°४८′३६″ = ६·८२३६१ और

सालघु ज्या १०८°११′२१″ = ६·६७७७४

(पटना १६३७ पूरक)

(१६) किसी त्रिभुज क ख ग में खा = १६, गा = २५, ख = ३३°१५′, शेष कोणों को बताओ जब कि लघु २ = ·३०१०३००

सालघु ज्या ३३°१५′ = ६·७३६०१२६

सालघु ज्या ५८°५६′ = ६·६३२७६१६,

सालघु ज्या ५८°५७′ = ६ · ६३२८३७६ (कलकत्ता १८६७)

(१७) यदि का = २५०, खा = २४०, क = ७२°४′४८″ तो शेष कोणों को ज्ञात करो जब कि

लघु २·५ = ·३६७६४००, लघु २·४ = ·३८०२११२

सालघु ज्या ७२°४′ = ६·६७८३७०२,

सालघु ज्या ७२°५′ = ६·६७८४१११

सालघु ज्या ६५°५६′ = ६·६६०६७३६

(१८) यदि का = ८, खा = ७, क = १२०° तो त्रिभुज को निर्धारित करो जब कि

लघु ७ = ·८४५०६८० लघु २ = ·३०१०३००

सालघु ज्या ६०° = ६·६३७५३०६,

सालघु ज्या ४६°१६′ = ६·८७६५२८७

सालघु ज्या $४६^\circ १७' = ६ \cdot ८७६६३७५$

(१६) किसी त्रिभुज में का = ३५६, खा = २६४, $ख = ५१^\circ २७'$ तो त्रिभुज को निर्धारित करो जब कि

सालघु ज्या $५१^\circ २७' = ६ \cdot ८६३२४२६$,

लघु $३५६ = २ \cdot ५५१४५०$

सालघु ज्या $७१^\circ १५' ३८'' = ६ \cdot ९७६३४५३$,

लघु $२६४ = २ \cdot ४६८३४७३$

सालघु ज्या $५७^\circ १७' २२'' = ६ \cdot ९२५००८३$,

लघु $३१६ \cdot ३१ = २ \cdot ५००११२६$,

लघु $१२७ \cdot ४०६ = २ \cdot १०५१६०७$,

सालघु ज्या $१६^\circ ४८' ३८'' = ६ \cdot ५१००८६०$

अन्य स्थितियां जिनमें त्रिभुज निर्धारित किया जा सकता है

(१४७) जब कि आधार [का], शीर्षक कोण [क] एवं शेष भुजाओं का योग [खा+गा] दिया हो—

हम जानते हैं कि

$$\frac{खा + गा}{का} = \frac{ज्या\ ख + ज्या\ ग}{ज्या\ क}$$

$$= \frac{२\ ज्या \frac{ख + ग}{२}\ कोज्या\ \frac{ख - ग}{२}}{ज्या\ क}$$

$$= \frac{२\ कोज्या\ \frac{क}{२}\ कोज्या\ \frac{ख - ग}{२}}{२\ ज्या\ \frac{क}{२}\ कोज्या\ \frac{क}{२}} = \frac{कोज्या\ \frac{ख - ग}{२}}{ज्या\ \frac{क}{२}}$$

$$\therefore \text{ कोज्या } \frac{\text{ख} - \text{ग}}{२} = \frac{\text{खा} + \text{गा}}{\text{का}} \text{ ज्या } \frac{\text{क}}{२}$$

• इस प्रकार $\frac{\text{ख} - \text{ग}}{२}$ ज्ञात हो गया

$$\text{किन्तु } \frac{\text{ख} + \text{ग}}{२} = ९०° - \frac{\text{क}}{२}$$

अतः ख और ग अलग-अलग ज्ञात हो जायँगे।

(१४८) जबकि भुजाओं की अर्द्धसीमा (Semi-Perimeter) एवं दो कोण ज्ञात हों।

हम जानते हैं कि—

$$\frac{\text{का}}{\text{ज्या क}} = \frac{\text{खा}}{\text{ज्या ख}} = \frac{\text{गा}}{\text{ज्या ग}} = \frac{\text{का} + \text{खा} + \text{गा}}{\text{ज्या क} + \text{ज्या ख} + \text{ज्या ग}}$$

$$= \frac{२ \text{ अ}}{\text{ज्या क} + \text{ज्या ख} + \text{ज्या ग}}$$

जहाँ कि अ त्रिभुज की अर्द्धसीमा है।

$$\therefore \text{ का} = \frac{२ \text{ अ ज्या क}}{\text{ज्या क} + \text{ज्या ख} + \text{ज्या ग}}$$

$$\text{उसी प्रकार खा} = \frac{२ \text{ अ ज्या ख}}{\text{ज्या क} + \text{ज्या ख} + \text{ज्या ग}}$$

$$\text{गा} = \frac{२ \text{ अ ज्या ग}}{\text{ज्या क} + \text{ज्या ख} + \text{ज्या ग}}$$

(१४९) जबकि त्रिभुज के शीर्षों से सामने की भुजाओं पर लम्ब [$\text{ल}_१, \text{ल}_२, \text{ल}_३$] दिये हों—

$$\text{चूँकि का} . \text{ल}_१ = \text{खा} . \text{ल}_२ = \text{गा} . \text{ल}_३ = २ \triangle$$

$$\text{अतः का} = \frac{२ \triangle}{\text{ल}_१}, \text{ खा} = \frac{२ \triangle}{\text{ल}_२}, \text{ गा} = \frac{२ \triangle}{\text{ल}_३}$$

$$\therefore \; २\, अ = का + खा + गा = २\triangle \left(\frac{१}{ल_1} + \frac{१}{ल_2} + \frac{१}{ल_3}\right)$$

$$अ = \triangle \left(\frac{ल_1 ल_2 + ल_2 ल_3 + ल_3 ल_1}{ल_1 ल_2 ल_3}\right)$$

इसी प्रकार अ − का, अ − खा, अ − गा के भी मान लम्बों में ज्ञात हो सकते हैं

$$\therefore \; कोज्या \frac{क}{२} = \sqrt{\frac{अ\,(अ - का)}{खा \,.\, गा}}$$

$$= \sqrt{\frac{(ल_2 ल_3 + ल_3 ल_1 + ल_1 ल_2)\,(-ल_2 ल_3 + ल_3 ल_1 + ल_1 ल_2)}{४\, ल_1\, ल_2\, ल_3}}$$

अतः कोण क ज्ञात हो गया। उसी प्रकार कोण ख और ग भी ज्ञात हो सकते हैं।

अभ्यास २७

निम्नलिखित के दिये जाने पर त्रिभुज कैसे निर्धारित करोगे ?

(१) ∠ ख, का, खा + गा (नागपुर १६४४)

(२) △, ∠ क, ∠ ख (नागपुर १६४५)

(३) $ल_1$, ख, ग

(४) का, खा . गा, △ क

(५) का, $ल_1$, ख − ग

(६) ∠ क, का, △ (नागपुर १६४५)

(७) का, गा − खा, ख (नागपुर १६४०)

संकेत—$(का - खा + गा)\, स \frac{ख}{२} = (का + खा - गा)\, स \frac{ग}{२}$

(८) का, खा, क − ख (उत्तर प्रदेश १६४२)

(९) कोण क, ख, ग समान्तर श्रेणी में, का, गा। (पटना १६३६)

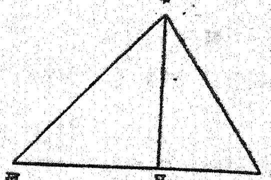
अध्याय १४

त्रिभुजों के प्रगुण

(Properties of Triangles)

(१५०) त्रिभुज का क्षेत्रफल

कल्पना करो कि क ख ग कोई त्रिभुज है। क से ख ग पर क घ लम्ब खींचो।



क घ = क ख ज्या ख = क ग ज्या ग

त्रिभुज क ख ग का क्षेत्रफल

$= \frac{1}{2}$ ख ग . क घ

$= \frac{1}{2}$ का.गा ज्या ख अथवा

$\frac{1}{2}$ का.खा ज्या ग

उसी प्रकार △ क ख ग $= \frac{1}{2}$ खा गा ज्या क .... (१)

$$= \frac{1}{2}\text{खा गा}\frac{2}{\text{खा गा}}\sqrt{\text{अ}(\text{अ}-\text{का})(\text{अ}-\text{खा})(\text{अ}-\text{गा})}$$

$$= \sqrt{\text{अ}[\text{अ}-\text{का}][\text{अ}-\text{खा}][\text{अ}-\text{गा}]} \quad \cdots\cdots (२)$$

$$\triangle = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

चूँकि $\frac{\text{का}}{\text{ज्या क}} = \frac{\text{खा}}{\text{ज्या ख}} = \frac{\text{गा}}{\text{ज्या ग}}$

$\therefore$ खा = का $\frac{\text{ज्या ख}}{\text{ज्या क}}$, गा = का $\frac{\text{ज्या ग}}{\text{ज्या क}}$

अतः ∠ क ख ग $= \frac{1}{2}$ खा गा ज्या क

$$= \frac{१}{२} का \frac{ज्या\ ख}{ज्या\ क} \cdot का \frac{ज्या\ ग}{ज्या\ क} ज्या\ क$$

$$= \frac{१}{२} का^२ \frac{ज्या\ ख\ ज्या\ ग}{ज्या\ क}$$

$$= \frac{१}{२} का^२ \frac{ज्या\ ख\ ज्या\ ग}{ज्या\ [ख+ग]} \cdots\cdots\cdots (३)$$

(१५१) उदाहरण —यदि ख = ४५°, ग = ६०°, का = २($\sqrt{३}$ + १) सिद्ध करो कि त्रिभुज का क्षेत्रफल ६ + २$\sqrt{३}$ है।

$$\triangle = \frac{१}{२} का^२ \frac{ज्या\ ख\ \ ज्या\ ग}{ज्या\ (ख+ग)} \cdots\cdots\cdots (३)\ से$$

$$= \frac{१}{२} ४ (\sqrt{३}+१)^२ \frac{ज्या\ ४५°\ ज्या\ ६०°}{ज्या\ १०५°}$$

$$= २ (४+२\sqrt{३}) \frac{ज्या\ ४५°\ ज्या\ ६०°}{कोज्या\ १५°}$$

$$= ४ (२+\sqrt{३}) \frac{\frac{१}{\sqrt{२}} \cdot \frac{\sqrt{३}}{२}}{\frac{\sqrt{३}+१}{२\sqrt{२}}}$$

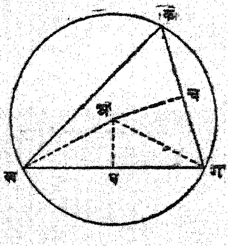
$$= \frac{४ (२+\sqrt{३}) \sqrt{३}}{\sqrt{३}+१}$$

$$= \frac{४\sqrt{३} (२+\sqrt{३}) (\sqrt{३}-१)}{(\sqrt{३}+१) (\sqrt{३}-१)}$$

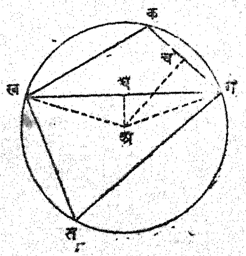
$$= \frac{४\sqrt{३} (\sqrt{३}+१)}{२} = २\sqrt{३} (\sqrt{३}+१)$$

$$= ६ + २\sqrt{३}$$

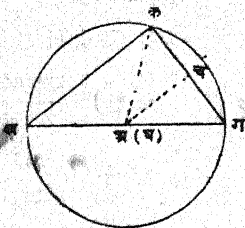
(१५२) त्रिभुज क ख ग के परिवृत्त (circum-circle) की त्रिज्या (radius) ज्ञात करना—



आकृति १
∠ क न्यून कोण है



आकृति २
∠ क अधिक कोण है



आकृति ३
∠ क समकोण है

त्रिभुज क ख ग की भुजा ख ग और क ग के लम्बअर्द्धक (perpendicular bisectors) खींचो जो अ पर मिलें। भूमिति से अ त्रिभुज का परिकेन्द्र (circum-centre) है। अ ख और अ ग को मिलाओ।

आकृति (१) में जब कि केन्द्र त्रिभुज के अन्दर है

△ अ ख घ = △ अ ग घ

∠ ख अ घ = ∠ ग अ घ

∴ ∠ ख अ घ = $\frac{1}{2}$ ∠ ख अ ग = ∠ ख क ग

= ∠ क

किन्तु $\frac{\text{अ घ}}{\text{अ ख}}$ = ज्या ख अ घ = ज्या क

$$\text{अ ख} = \frac{\text{अ घ}}{\text{ज्या क}} = \frac{\frac{१}{२}\text{ख ग}}{\text{ज्या क}} = \frac{\text{का}}{\text{२ ज्या क}}$$

$$\text{अतः त्रा} = \frac{\text{का}}{\text{२ ज्या क}} \quad \left(R = \frac{a}{2 \sin A} \right)$$

आकृति (२) में जब कि केन्द्र त्रिभुज के बाहर है।

$$\angle \text{ख अ घ} = \frac{१}{२} \angle \text{घ अ ग} = \angle \text{ख त ग}$$

$$= १८०^\circ - \text{क}$$

$$\therefore \text{त्रा} = \text{अ ख} = \frac{\text{का}}{\text{२ ज्या ख अ घ}}$$

$$= \frac{\text{का}}{\text{२ ज्या } (१८०^\circ - \text{क})}$$

$$= \frac{\text{का}}{\text{२ ज्या क}}$$

आकृति (३) में जब कि केन्द्र त्रिभुज की ख ग भुजा पर है।

$$\text{त्रा} = \text{अ ख} = \frac{१}{२}\text{क ख} = \frac{\text{का}}{२} = \frac{\text{का}}{\text{२ ज्या क}}$$

क्योंकि क के समकोण होने के कारण ज्या क = १

इस प्रकार उपर्युक्त प्राप्त फल सभी प्रकार के त्रिभुजों के लिये लागू हो सकते हैं।

$$\text{अतः त्रा} = \frac{\text{का}}{\text{२ ज्या क}} = \frac{\text{खा}}{\text{२ ज्या ख}} = \frac{\text{गा}}{\text{२ ज्या ग}}$$

$$R = \frac{a}{2\sin A} = \frac{b}{2\sin B} = \frac{c}{2\sin C}$$

चूँकि ज्या क $= \frac{२}{\text{खा गा}}\sqrt{\text{अ (अ − का) (अ − खा) (अ − गा)}}$

जहाँ कि अ त्रिभुज की अर्ध परिमिति है।

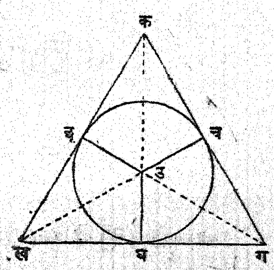
$$= \frac{२\triangle}{\text{खा गा}}$$

$$\therefore \text{त्रा} = \frac{\text{का}}{\text{२ ज्या क}} = \frac{\text{का खा गा}}{४\triangle}, \left(R = \frac{a\,b\,c}{4\,S} \right)$$

(१५३) त्रिभुज क ख ग के अन्तः वृत (incircle) की त्रिज्या त्र ज्ञात करना।

(१) त्रिभुज क ख ग के कोणों के अर्द्धक (bisectors) खींचो जो कि उ विन्दु पर मिलें। उ अन्तः वृत्त का केन्द्र (centre) है। उ से का, खा, गा पर क्रमशः उघ, उ च, उ छ लम्ब डालो।

अब उघ = उच = उ छ = त्र



$\triangle$ क ख ग = $\triangle$ उ ख ग + $\triangle$ उ क ग + $\triangle$ उ क ख

$= \frac{१}{२}$ खग · उघ + $\frac{१}{२}$ कग · उच + $\frac{१}{२}$ कख · उछ

$= \frac{१}{२}$ का त्र + $\frac{१}{२}$ खा · त्र + $\frac{१}{२}$ गा · त्र

$= \frac{१}{२}$ (का + खा + गा) त्र

= अ त्र

$$\therefore \text{त्र} = \frac{\triangle}{\text{अ}} \left(r = \frac{S}{s} \right)$$

(२) त्र का द्वितीय मान—

ख घ एवं ख छ वृत्त की स्पर्श रेखायें (tangent lines) हैं।

$\therefore$ ख घ = ख छ

उसी प्रकार कछ = कच, गघ = गच

२ अ = का + खा + गा

= खघ + घग + गच + चक + कछ + छ ख

= (खघ + छख) + (घग + गच) + (चक + कछ)

= २ खघ + २ घग + २ कछ

$\therefore$ अ = खघ + घग + कछ

= का + कछ

अथवा क छ = अ − का

किन्तु $\frac{\text{उ छ}}{\text{क छ}}$ = स्प उ क छ = स्प $\frac{\text{क}}{२}$

$\therefore$ उ छ = क छ स्प $\frac{\text{क}}{२}$

अथवा त्र = [अ − का] स्प $\frac{\text{क}}{२}$, $r=(s-a)\tan\frac{A}{2}$

इसी प्रकार

त्र = [अ − खा] स्प $\frac{\text{ख}}{२}$, $r=(s-b)\tan\frac{B}{2}$

त्र = [अ − गा] स्प $\frac{\text{ग}}{२}$, $r=(s-c)\tan\frac{C}{2}$

(३) त्र का तृतीय मान—

का = ख घ + घ ग

= उ घ कोस्प उ ख घ + उ घ कोस्प उ ग घ

$$= त्र \text{ कोस्प } \frac{ख}{२} + त्र \text{ कोस्प } \frac{ग}{२}$$

$$= त्र \left[\frac{\text{कोज्या } \frac{ख}{२} \text{ ज्या } \frac{ग}{२} + \text{कोज्या } \frac{ग}{२} \text{ ज्या } \frac{ख}{२}}{\text{ज्या } \frac{ख}{२} \text{ ज्या } \frac{ग}{२}} \right]$$

$$\therefore \text{ का ज्या } \frac{ख}{२} \text{ ज्या } \frac{ग}{२} = त्र \left[\text{कोज्या } \frac{ख}{२} \text{ ज्या } \frac{ग}{२} + \text{ज्या } \frac{ख}{२} \text{ कोज्या } \frac{ग}{२} \right]$$

$$= त्र \text{ ज्या } \left(\frac{ख + ग}{२} \right)$$

$$= त्र \text{ ज्या } \left(९०° - \frac{क}{२} \right)$$

$$= त्र \text{ कोज्या } \frac{क}{२}$$

$$\therefore त्र = \frac{\text{का ज्या } \frac{ख}{२} \text{ ज्या } \frac{ग}{२}}{\text{कोज्या } \frac{क}{२}}$$

$$r = \frac{a \sin \frac{C}{2} \sin \frac{B}{2}}{\cos \frac{A}{2}}$$

(४) त्र का चतुर्थ मान—

$$का = २ \text{ त्रा ज्या क} = ४ \text{ त्रा ज्या } \frac{क}{२} \text{ कोज्या } \frac{क}{२}$$

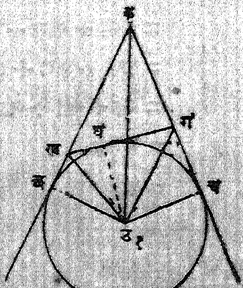
$$त्र = \frac{का \ ज्या \frac{ख}{२} ज्या \frac{ग}{२}}{कोज्या \frac{क}{२}}$$

$$= \frac{४ \ त्रा \ ज्या \frac{क}{२} कोज्या \frac{क}{२} ज्या \frac{ख}{२} ज्या \frac{ग}{२}}{कोज्या \frac{क}{२}}$$

$$\therefore \ त्र = ४ \ त्रा \ ज्या \frac{क}{२} ज्या \frac{ख}{२} ज्या \frac{ग}{२}$$

$$r = 4 \ R \ \sin\frac{A}{2} \ \sin\frac{B}{2} \ \sin\frac{C}{2}$$

(१५४) त्रिभुज क ख ग में कोण क के सामने के वाह्यवृत्त (ex-circle) की त्रिज्या ($त्र_1$) ज्ञात करना—वाह्यवृत्त (ex-circle) वह वृत्त है जो त्रिभुज की एक भुजा और अन्य दो बढ़ाई हुई भुजाओं का स्पर्श करे। प्रत्येक त्रिभुज के ऐसे तीन वृत्त होते हैं। क्रमशः का, खा, गा को स्पर्श करने वाले इन वृत्तों की त्रिज्याएँ $त्र_1$, $त्र_2$, $त्र_3$ से सम्बोधित की जाती हैं।



(१) मानलो $उ_१$ कोण क के सामने के उस वाह्यवृत्त का वाह्य केन्द्र है, जो ख ग भुजा और बढ़ाई हुई भुजाओं क ग और क ख को क्रमशः घ, च, छ पर स्पर्श करता है। $उ_१$ घ, $उ_१$ च, $उ_१$ छ को मिलाओ।

अतः $उ_१ घ = उ_१ च = उ_१ छ = त्र_१$

त्रिभुज क ख ग = त्रिभुज $उ_१$ क ख + त्रिभुज $उ_१$ क ग − त्रिभुज $उ_१$ ख ग

$= \frac{१}{२} त्र_१ गा + \frac{१}{२} त्र_१ खा - \frac{१}{२} त्र_१ का$

$= \frac{१}{२} त्र_१ (खा + गा - का)$

$= \frac{१}{२} त्र_१ (का + खा + गा - २ का)$

$= त्र_१ (अ - का)$ जहाँ कि अ त्रिभुज की अर्द्ध सीमा है।

अतः $त्र_१ = \frac{\triangle}{अ - का}$ $\qquad r_1 = \frac{S}{s - a}$

उसी प्रकार $त्र_२ = \frac{\triangle}{अ - खा}$ $\qquad r_2 = \frac{S}{s - b}$

$त्र_३ = \frac{\triangle}{अ - गा}$ $\qquad r_3 = \frac{S}{s - c}$

(२) $त्र_१$ का दूसरा मान—

$$२ क च = कछ + कच = कख + खछ + कग + गच$$
$$= कख + खघ + कग + गघ$$
$$= कख + कग + खग$$
$$= गा + खा + का$$
$$= २ अ$$
$$क च = अ$$

त्रिभुज $उ_१$ क च में

$$\frac{उ_१ च}{क च} = स्प \frac{क}{२}$$

$$उ_1 च = क च स्प \frac{क}{२}$$

$$त्र_1 = अ स्प \frac{क}{२}$$

$$r_1 = s \tan \frac{A}{2}$$

उसी प्रकार $$त्र_2 = अ स्प \frac{ख}{२}$$

$$r_2 = s \tan \frac{B}{2}$$

$$त्र_3 = अ स्प \frac{ग}{२}$$

$$r_3 = s \tan \frac{C}{2}$$

(३) $त्र_1$ का तीसरा मान—

$$का = ख ग + घ ग$$

$$= त्र_1 \left(स्प \frac{ख}{२} + स्प \frac{ग}{२} \right)$$

$$= त्र_1 \left(\frac{ज्या \frac{ख}{२} कोज्या \frac{ग}{२} + ज्या \frac{ग}{२} कोज्या \frac{ख}{२}}{कोज्या \frac{ख}{२} कोज्या \frac{ग}{२}} \right)$$

$$= त्र_1 \frac{ज्या\left(\frac{ख+ग}{२}\right)}{कोज्या\frac{ख}{२}\ कोज्या\frac{ग}{२}}$$

$$= त्र_1 \frac{कोज्या\frac{क}{२}}{कोज्या\frac{ख}{२}\ कोज्या\frac{ग}{२}}$$

$$\therefore त्र_1 = \frac{का\ कोज्या\frac{ख}{२}\ कोज्या\frac{ग}{२}}{कोज्या\frac{क}{२}} \quad r_1 = \frac{a\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}$$

(४) त्र₁ का चतुर्थ मान—

$$का = २\ त्रा\ ज्या\ क = ४\ त्रा\ ज्या\frac{क}{२}\ कोज्या\frac{क}{२}$$

$$\therefore त्र_1 = ४\ त्रा\ ज्या\frac{क}{२}\ कोज्या\frac{ख}{२}\ कोज्या\frac{ग}{२}$$

$$r_1 = 4\ R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

इसी प्रकार

$$त्र_2 = ४\ त्रा\ कोज्या\frac{क}{२}\ ज्या\frac{ख}{२}\ कोज्या\frac{ग}{२}$$

$$r_2 = 4\ R\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$त्र_3 = ४ \ त्रा \ कोज्या \frac{क}{२} \ कोज्या \frac{ख}{२} \ ज्या \frac{ग}{२}$$

$$r_3 = 4 \ R \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$$

(१२४) उदाहरण १—सिद्ध करो कि

$$\frac{१}{त्र_1} + \frac{१}{त्र_2} + \frac{१}{त्र_3} = \frac{१}{त्र}$$

(दिल्ली १९३९, १९४६, राजपूताना १९४०, उत्तर प्रदेश १९२९, १९४१, कलकत्ता १९२६, १९२८, १९३१)

$$\frac{१}{त्र_1} + \frac{१}{त्र_2} + \frac{१}{त्र_3} = \frac{अ - का}{\triangle} + \frac{अ - खा}{\triangle} + \frac{अ - गा}{\triangle}$$

$$= \frac{३ \ अ - (का + खा + गा)}{\triangle} = \frac{३ \ अ - २ \ अ}{\triangle}$$

$$= \frac{अ}{\triangle} = \frac{१}{त्र}$$

उदाहरण २—सिद्ध करो कि

$$का \ (त्र \ त्र_1 + त्र_2 \ त्र_3) = खा \ (त्र \ त्र_2 + त्र_3 \ त्र_1)$$

$$= गा \ (त्र \ त्र_3 + त्र_1 \ त्र_2) + का \ (त्र \ त्र_1 + त्र_2 \ त्र_3)$$

$$= का \left(\frac{\triangle}{अ} \frac{\triangle}{(अ - का)} + \frac{\triangle}{(अ - खा)} \frac{\triangle}{(अ - गा)} \right)$$

$$= का \ \triangle^2 \left\{ \frac{१}{अ \ (अ - का)} + \frac{१}{(अ - खा) \ (अ - गा)} \right\}$$

$$= का \ \triangle^2 \left\{ \frac{अ^2 - अ \ (खा + गा) + खा \ गा + अ^2 - अ \ का}{अ \ (अ - का) \ (अ - खा) \ (अ - गा)} \right\}$$

$$= \frac{\text{का}\ \Delta^2}{\Delta^2} \{ 2\ \text{अ}^2 - \text{अ}\ (\text{का} + \text{खा} + \text{गा}) + \text{खा गा} \}$$

$$= \quad \text{का} \{ 2\ \text{अ}^2 - 2\ \text{अ}^2 + \text{खा गा} \}$$

$$= \text{का खा गा}$$

उसी प्रकार खा $(\text{त्र}\text{त्र}_2 + \text{त्र}_3\text{त्र}_1) = \text{का खा गा} = \text{गा}\ (\text{त्र}\text{त्र}_3 + \text{त्र}_1\text{त्र}_2)$

उदाहरण ३—एक त्रिभुज का क्षेत्रफल ९६ है और उसके वाह्य-वृत्तों की त्रिज्याएँ क्रमशः ८, १२, २४ हैं। उसकी भुजायें बताओ।

(उत्तर प्रदेश १९३५)

हम जानते हैं कि

$$\text{त्र}_1 = \frac{\Delta}{\text{अ} - \text{का}}, \ \text{त्र}_2 = \frac{\Delta}{\text{अ} - \text{खा}}, \ \text{त्र}_3 = \frac{\Delta}{\text{अ} - \text{गा}}$$

जहाँ कि Δ = त्रिभुज का क्षेत्रफल, अ = त्रिभुज की अर्द्ध परिमिति है।

$$\therefore \ \text{अ} - \text{का} = \frac{\Delta}{\text{त्र}_1} = \frac{96}{8} = 12$$

$$\text{अ} - \text{खा} = \frac{\Delta}{\text{त्र}_2} = \frac{96}{12} = 8$$

$$\text{अ} - \text{गा} = \frac{\Delta}{\text{त्र}_3} = \frac{96}{24} = 4$$

$$\therefore (\text{अ} - \text{का}) + (\text{अ} - \text{खा}) = 12 + 8 = 20$$

अर्थात् $\text{गा} = 20$

उसी प्रकार का = १२, खा = १६

उदाहरण ४—यदि $\left(1 + \frac{\text{त्र}_1}{\text{त्र}_2} \right) \left(1 - \frac{\text{त्र}_1}{\text{त्र}_3} \right) = 2$ हो

तो सिद्ध करो कि त्रिभुज समकोण त्रिभुज है।

(उत्तर प्रदेश १९३९)

हम जानते हैं कि

$$त्र_1 = अ \text{ स्प } \frac{क}{2},\ त्र_2 = अ \text{ स्प } \frac{ख}{2},\ त्र_3 = अ \text{ स्प } \frac{ग}{2}$$

तथा $\text{स्प } \frac{ख}{2} \text{ स्प } \frac{ग}{2} + \text{स्प } \frac{ग}{2} \text{ स्प } \frac{क}{2} + \text{स्प } \frac{क}{2} \text{ स्प } \frac{ख}{2} = 1$

यदि $\left(1 - \frac{त्र_1}{त्र_2}\right)\left(1 - \frac{त्र_1}{त्र_3}\right) = 2$

$$\left(1 - \frac{अ \text{ स्प } \frac{क}{2}}{अ \text{ स्प } \frac{ख}{2}}\right)\left(1 - \frac{अ \text{ स्प } \frac{क}{2}}{अ \text{ स्प } \frac{ग}{2}}\right) = 2$$

अर्थात् $\left(\text{स्प } \frac{ख}{2} - \text{स्प } \frac{क}{2}\right)\left(\text{स्प } \frac{ग}{2} - \text{स्प } \frac{क}{2}\right) = 2 \text{ स्प } \frac{ख}{2} \text{ स्प } \frac{ग}{2}$

$$\text{स्प } \frac{ख}{2} \text{ स्प } \frac{ग}{2} - \text{स्प } \frac{क}{2} \text{ स्प } \frac{ग}{2} - \text{स्प } \frac{ख}{2} \text{ स्प } \frac{क}{2} + \text{स्प}^2 \frac{क}{2} = 2 \text{ स्प } \frac{ख}{2} \text{ स्प } \frac{ग}{2}$$

अर्थात् $\text{स्प}^2 \frac{क}{2} = \text{स्प } \frac{ख}{2} \text{ स्प } \frac{ग}{2} + \text{स्प } \frac{ग}{2} \text{ स्प } \frac{क}{2} + \text{स्प } \frac{क}{2} \text{ स्प } \frac{ख}{2}$

$$\text{स्प } \frac{क}{2} = 1$$

$$\frac{क}{2} = 45^\circ$$

$$\therefore \quad क = 90^\circ$$

अतः त्रिभुज समकोण त्रिभुज है।

उदाहरण ५—यदि प, $प_1$, $प_2$, $प_3$ क्रमशः अन्तर्वृत्त (incircle) एवं वाह्य वृत्तों (ex-circles) के क्षेत्रफल हों तो सिद्ध करो कि

$$\frac{1}{\sqrt{प}} = \frac{1}{\sqrt{प_1}} + \frac{1}{\sqrt{प_2}} + \frac{1}{\sqrt{प_3}}$$ (पंजाब १६१०)

$प = \pi त्र^2,\ प_1 = \pi त्र_1^2,\ प_2 = \pi त्र_2^2,\ प_3 = \pi त्र_3^2$

$$\frac{1}{\sqrt{प_1}} + \frac{1}{\sqrt{प_2}} + \frac{1}{\sqrt{प_3}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi त्र_1^2}} + \frac{1}{\sqrt{\pi त्र_2^2}} + \frac{1}{\sqrt{\pi त्र_3^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{त्र_1} + \frac{1}{त्र_2} + \frac{1}{त्र_3}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{त्र}$$ (उदाहरण १ से)

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi त्र^2}} = \frac{1}{\sqrt{प}}$$

उदाहरण ६—सिद्ध करो कि

$$(त्र_3 + त्र_1)(त्र_3 + त्र_2)\ ज्या\ ग = २\ त्र_3 \sqrt{त्र_2 त्र_3 + त्र_3 त्र_1 + त्र_1 त्र_2}$$

वाम पक्ष

$$= \left(\frac{\Delta}{अ - गा} + \frac{\Delta}{अ - का}\right)\left(\frac{\Delta}{अ - गा} + \frac{\Delta}{अ - का}\right) \cdot \frac{२\Delta}{का\ खा}$$

$$= \frac{२\Delta^3}{का\ खा} \cdot \frac{अ - का + अ - गा}{(अ - गा)(अ - का)} \cdot \frac{अ - खा + अ + गा}{(अ - गा)(अ - खा)}$$

$$= \frac{२\Delta^3}{का\ खा} \cdot \frac{खा}{(अ - गा)(अ - का)} \cdot \frac{का}{(अ - गा)(अ - खा)}$$

$$= \frac{२\Delta\ अ(अ - का)(अ - खा)(अ - गा)\ का\ खा}{का\ खा \cdot (अ - का)(अ - खा)(अ - गा)^2}$$

$$= \frac{२\triangle अ}{अ - गा}$$

दक्षिण पक्ष

$$= १\ त्र_3 \sqrt{\frac{\triangle}{अ - खा} \cdot \frac{\triangle}{अ - गा} + \frac{\triangle}{अ - गा} \cdot \frac{\triangle}{अ - का} + \frac{\triangle}{अ - का} \cdot \frac{\triangle}{अ - खा}}$$

$$= २\ त्र_3 \triangle \sqrt{\frac{प - का + अ - खा + अ - गा}{(अ - का)\ (अ - खा)\ (अ - गा)}}$$

$$= २\ त्र_3\ अ$$

$$= २\frac{\triangle अ}{अ - गा}$$

∴ वाम पक्ष = दक्षिण पक्ष

अभ्यास २८

(१) यदि किसी त्रिभुज का एक कोण ६०° हो, क्षेत्रफल १०√३ वर्ग फीट और परिमिति २० फीट हो तो उसकी भुजायें बताओ।

(२) उस त्रिभुज के अन्तः वृत्त एवं वाह्य वृत्तों की त्रिज्यायें बताओ जिसकी भुजायें ५, ७ और १० हों।

(३) किसी त्रिभुज का क्षेत्रफल ६ वर्ग फीट है। यदि उसके वाह्यवृत्तों की त्रिज्यायें क्रमशः २, ३, ६ फीट हो तो त्रिभुज की भुजाओं की लम्बाई एवं महत्तम कोण ज्ञात करो। (उत्तर प्रदेश १६४३)

(४) किसी त्रिभुज में का = २०, खा = ११, गा = २५ हो तो त्रा, त्र और $त्र_1$ का मान बताओ। (उत्तर प्रदेश १६४५)

(५) यदि किसी समद्विबाहु त्रिभुज के चारों ओर खिंचा हुआ परिवृत्त,

उसके समान भुजाओं में से एक को स्पर्श करने वाले बहिर्वृत्त के बराबर हो तो सिद्ध करो कि त्रिभुज समकोण त्रिभुज है।

सिद्ध करो

(६) $\triangle = \frac{२ \text{ का खा गा}}{\text{का} + \text{खा} + \text{गा}}$ कोज्या $\frac{क}{२}$ कोज्या $\frac{ख}{२}$ कोज्या $\frac{ग}{२}$

(कलकत्ता १८६१)

(७) अ = ४ त्रा कोज्या $\frac{क}{२}$ कोज्या $\frac{ख}{२}$ कोज्या $\frac{ग}{२}$

(८) त्र $त्र_1 त्र_2 त्र_3 = \triangle^2 = त्र^2 त्र_1^2$ कोस्प$^2 \frac{क}{२}$ (बम्बई १६४३)

(९) $त्र_1 त्र_2 त्र_3 = त्र\ अ^2$

(१०) त्रा त्र (ज्या क + ज्या ख + ज्या ग) = $\triangle$ (पंजाब १६४०
दिल्ली १६४७)

(११) $\frac{\text{खा} - \text{गा}}{त्र_1} + \frac{\text{गा} - \text{का}}{त्र_2} + \frac{\text{का} - \text{खा}}{त्र_3} = 0$

(१२) $\frac{त्र\ त्र_1}{त्र_2 त्र_3}$ = स्प$^2 \frac{क}{२}$ (उत्तर प्रदेश १६४७)

(१३) $\frac{त्र_1 - त्र}{\text{का}} + \frac{त्र_2 - त्र}{\text{खा}} = \frac{\text{गा}}{त्र_3}$

(१४) $त्र_1$ = त्र कोस्प $\frac{ख}{२}$ कोस्प $\frac{ग}{२}$

(१५) $त्र_1 + त्र_2$ = गा कोस्प $\frac{ग}{२}$ (उत्तर प्रदेश १६४६)

(१६) $त्र_1 त्र_2 + त्र\ त्र_3$ = का खा

(१७) कोज्या क + कोज्या ख + कोज्या ग = १ + $\frac{त्र}{त्रा}$

(दिल्ली १६४१, कलकत्ता १६२६)

(१८) $त्र_2 त्र_3 + त्र_3 त्र_1 + त्र_1 त्र_2 = श्र^2 = \frac{\triangle^2}{त्र^2}$

(दिल्ली १६४६, बंबई १६२७, उत्तर प्रदेश १६२८)

(१६) $ज्या\ क + ज्या\ ख + ज्या\ ग = \frac{स}{त्रा}$ (कलकत्ता १६२६)

(२०) $त्र\ त्र_1\ (त्र_2 - त्र_3) = (खा - गा) \triangle$

(२१) $त्र\ कोस्र \frac{क}{२} कोस्प \frac{ख}{२} कोस्प \frac{ग}{२} = \sqrt{\triangle}$

(२२) $का\ कोज्या\ ख\ कोज्या\ ग + खा\ कोज्या\ ग\ कोज्या\ क$

$+ गा\ कोज्या\ क\ कोज्या\ ख = \frac{\triangle}{त्रा}$

(२३) $(त्र_1 + त्र_2)\ स्प \frac{ग}{२} = (त्र_3 - त्र)\ कोस्र \frac{ग}{२} = गा$

(पंजाब १६४४, उत्तर प्रदेश १६४६)

(२४) $का\ कोस्प\ क + खा\ कोस्र\ ख + गा\ कोस्र\ ग = २\ (त्रा + त्र)$

(राजपूताना १६४१, १६४३, उत्तरप्रदेश १६२६, १६४५, दिल्ली १६४२)

(२५) $४\ त्रा\ ज्या\ क\ ज्या\ ख\ ज्या\ ग = का\ कोज्या\ क + खा\ कोज्या\ ख + गा\ कोज्या\ ग$ (राजपूताना १६४०, १६४५, उत्तर प्रदेश १६३६, १६४४ पंजाब १६३६)

(२६) $त्र_1\ (त्र_2 + त्र_3)\ व्युज्या\ क = त्र_2\ (त्र_3 + त्र_1)\ व्युज्या\ ख = त्र_3\ (त्र_1 + त्र_2)\ व्युज्या\ ग$ (उ० प्र० १६४२)

(२७) $त्र_1 + त्र_2 + त्र_3 - त्र = ४\ त्रा$ (राजपूताना १६३८, १६४१, १६४४ उत्तर प्रदेश १६२६, १६४०, १६४५ आंध्र १६४२, दिल्ली १६४०)

(२८) $कोज्या\ क = \frac{२\ त्रा + त्र - त्र_{१}}{२\ त्रा}$ (राजपूताना १९३९)

(२९) $(त्र_{१} - त्र)(त्र_{२} - त्र)(त्र_{३} - त्र) = ४\ त्रा\ त्र^{२}$

(उत्तर प्रदेश १९३७, १९४९)

(३०) $१६\ त्रा^{२}\ त्र त्र_{१}\ त्र_{२}\ त्र_{३} = का^{२}\ खा^{२}\ गा^{२}$

(३१) $(त्र + त्र_{१})\ स्प\ \frac{ख - ग}{२} + (त्र + त्र_{२})\ स्प\ \frac{ग - क}{२}$

$+ (त्र + त्र_{३})\ स्प\ \frac{क - ख}{२} = ०$ (उत्तर प्रदेश १९३६)

(३२) $\frac{१}{खा\ .\ गा} + \frac{१}{गा\ .\ का} + \frac{१}{का\ .\ खा} = \frac{१}{२\ त्रा\ त्र}$

(उत्तर प्रदेश १९४२)

(३३) $४\ त्रा = \frac{(त्र_{२} + त्र_{३})(त्र_{३} + त्र_{१})(त्र_{१} + त्र_{२})}{त्र_{२}\ त्र_{३} + त्र_{३}\ त्र_{१} + त्र_{१}\ त्र_{२}}$

(उत्तर प्रदेश १९२७)

(३४) $\frac{१}{त्र^{२}} + \frac{१}{त्र_{१}^{२}} + \frac{१}{त्र_{२}^{२}} + \frac{१}{त्र_{३}^{२}} = \frac{का^{२} + खा^{२} + गा^{२}}{\Delta^{२}}$

(उत्तर प्रदेश १९३२, पंजाब १९४१)

(३५) $का^{२} = \frac{त्र^{२}_{१}\ (त्र_{२} + त्र_{३})^{२}}{त्र_{२}\ त्र_{३} + त्र_{३}\ त्र_{१} + त्र_{१}\ त्र_{२}}$

(३६) $(त्र_{३} + त्र_{१})(त्र_{३} + त्र_{२})\ ज्या\ ग$

$= २\ त्र_{३}\ \sqrt{त्र_{२}\ त्र_{३} + त्र_{२}\ त्र_{१} + त्र_{१}\ त्र_{२}}$

(उत्तर प्रदेश १९४३)

(३७) $\frac{खा\ गा - त्र_{२}\ त्र_{३}}{त्र_{१}} = \frac{गा\ का - त्र_{३}\ त्र_{१}}{त्र_{२}}$

$$= \frac{\text{का खा} - \text{त्र}_1 \text{त्र}_2}{\text{त्र}_3}$$ (राजपूताना १६४७)

(३८) $$\left(\frac{१}{\text{त्र}} - \frac{१}{\text{त्र}_1}\right)\left(\frac{१}{\text{त्र}} - \frac{१}{\text{त्र}_2}\right)\left(\frac{१}{\text{त्र}} - \frac{१}{\text{त्र}_3}\right)$$

$$= \frac{१६ \text{ त्रा}}{\text{का} + \text{खा} + \text{गा}} = \frac{४ \text{ त्रा}}{\text{त्र}^2 \text{ श्र}^2}.$$

(उत्तर प्रदेश १६३८)

(३६) $$\text{त्र}^2 + \text{त्र}_1^2 + \text{त्र}_2^2 + \text{त्र}_3^2 = १६ \text{ त्रा}^2 - \text{का}^2 - \text{खा}^2 - \text{गा}^2$$

(४०) $$\left(\frac{१}{\text{त्र}} + \frac{१}{\text{त्र}_1} + \frac{१}{\text{त्र}_2} + \frac{१}{\text{त्र}_3}\right)^2$$

$$= \frac{४}{\text{त्र}}\left(\frac{१}{\text{त्र}_1} + \frac{१}{\text{त्र}_2} + \frac{१}{\text{त्र}_3}\right)$$

(४१) $$\frac{\text{त्र}_1}{\text{खा . गा}} + \frac{\text{त्र}_2}{\text{गा . का}} + \frac{\text{त्र}_3}{\text{का . खा}} = \frac{१}{\text{त्र}} - \frac{१}{२ \text{ त्रा}}$$

(राजपूताना १६४२)

(४२) यदि $\text{क} = ६०°$, सिद्ध करो कि $\text{त्र}_2 + \text{त्र}_3$
$= \text{त्र}_1 - \text{त्र} = \text{का}$

(४३) यदि त्रा = २ त्र, सिद्ध करो कि त्रिभुज समत्रिबाहु (equilateral) त्रिभुज है।

(४४) यदि (का − खा) (श्र − गा) = (खा − गा) (श्र − का) हो, तो सिद्ध करो कि वाह्यवृत्तों की त्रिज्यायें समान्तर श्रेणी (A. P.) में होंगी

(उत्तर प्रदेश १६४६)

(४५) यदि का, खा, गा समान्तर श्रेणी (A. P.) में हों, सिद्ध करो कि $\frac{१}{त्र_१}$, $\frac{१}{त्र_२}$, $\frac{१}{त्र_३}$ भी समान्तर श्रेणी में होंगे।

(४६) यदि $त्र_१$, $त्र_२$, $त्र_३$ हरात्मक श्रेणी (H. P.) में हो तो सिद्ध करो कि का, खा, गा समान्तर श्रेणी (A. P.) में होंगे।

(राजपूताना १९३८)

(४७) यदि $त्र_१ = त्र + त्र_२ + त्र_३$ सिद्ध करो कि त्रिभुज समकोण त्रिभुज होगा।

(४८) यदि का, खा, गा समान्तर श्रेणी (A. P.) में हो तो सिद्ध करो कि

$$का \,.\, गा = ६ \; त्र \; त्रा$$

(४९) यदि खा = गा, सिद्ध करो कि

$$त्र \; त्र_१ = \frac{का^२}{४}$$

(५०) सिद्ध करो कि किसी त्रिभुज के अन्तःवृत्त के क्षेत्रफल और उसके क्षेत्रफल में π : कोस्प $\frac{क}{२}$ कोस्प $\frac{ख}{२}$ कोस्प $\frac{ग}{२}$ का सम्बंध होता है।

(५१) यदि एक वाह्यवृत्त (ex-circle) का व्यास (diameter) त्रिभुज की परिमिति के बराबर हो तो सिद्ध करो कि त्रिभुज समकोण त्रिभुज होगा।

(५२) यदि का भुजा को स्पर्श करने वाला वाह्यवृत्त परिवृत्त (circum-circle) के बराबर हो, सिद्ध करो कि

$$कोज्या \; क = कोज्या \; ख + कोज्या \; ग$$

(५३) यदि किसी त्रिभुज का परिकेन्द्र (circum-centre)

अन्तः वृत्त (in-circle) पर स्थित हो तो सिद्ध करो कि

$$\text{कोज्या क} + \text{कोज्या ख} + \text{कोज्या ग} = \sqrt{२}$$

(उत्तर प्रदेश १६४६)

(५४) सिद्ध करो कि वाह्य वृत्त की त्रिज्यायें समीकरण

$$\text{य}^3 - (\text{त्र} + ४\ \text{त्रा})\ \text{य}^२ + \text{अ}^२\ \text{य} - \text{अ}^२\ \text{त्र} = ०$$

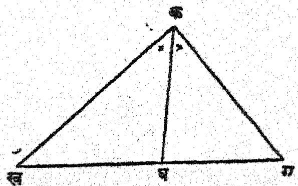
के मूल (roots) हैं।

(५५) सिद्ध करो कि का, खा, गा समीकरण

$$\text{य}^3 - २\ \text{अ}\ \text{य}^२ + (\text{त्र}^२ + \text{अ}^२ + ४\ \text{त्रा}\ \text{त्र})\ \text{य} - ४\ \text{त्रा}\ \text{त्र}\ \text{अ} = ०$$

के मूल (roots) हैं।

(१५५) त्रिभुज के कोणों के अर्द्धक (Bisectors of the angles)



मान लो त्रिभुज क ख ग में क घ कोण क का अर्द्धक है।

ज्यामिति से हम जानते हैं कि

$$\frac{\text{ख घ}}{\text{घ ग}} = \frac{\text{क ख}}{\text{क ग}} = \frac{\text{गा}}{\text{खा}}$$

$$\therefore \frac{\text{ख घ}}{\text{गा}} = \frac{\text{घ ग}}{\text{खा}} = \frac{\text{ख घ} + \text{घ ग}}{\text{खा} + \text{गा}} = \frac{\text{का}}{\text{खा} + \text{गा}}$$

$$\text{अतः ख घ} = \frac{\text{का गा}}{\text{खा} + \text{गा}} \quad \text{तथा घ ग} = \frac{\text{का खा}}{\text{खा} + \text{गा}}$$

$$\text{अब} \triangle \text{क ख घ} + \triangle \text{क ग घ} = \triangle \text{क ख ग}$$

$$\therefore \frac{१}{२}\text{गा} \cdot \text{क घ ज्या}\frac{\text{क}}{२} + \frac{१}{२}\text{खा} \cdot \text{क घ ज्या}\frac{\text{क}}{२} = \frac{१}{२}\text{खा} \cdot \text{गा ज्या क}$$

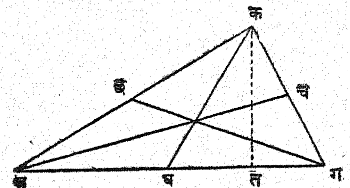
$$क\,घ = \frac{खा\ गा}{खा + गा} \cdot \frac{ज्या\ क}{ज्या \frac{क}{२}}$$

$$= \frac{२\ खा\ गा}{खा + गा}\ कोज्या \frac{क}{२}$$

(१५६) माध्यिकायें अथवा मध्यगत रेखायें (medians)

त्रिभुज के शीर्षों को सामने की भुजाओं के मध्य विन्दु से मिलाने वाली रेखाओं को मध्यगत रेखायें अथवा माध्यिकायें कहते हैं। जिस विन्दु पर ये रेखायें मिलती हैं उसे गुरुत्व केन्द्र (centroid) कहते हैं।

त्रिभुज क ख ग की क घ, ख च, ग छ मध्यगत रेखायें हैं।



ज्यामिति से हम जानते हैं कि

$$क\,ख^{२} + क\,ग^{२} = २\,(क\,घ^{२} + ख\,घ^{२})$$

$$गा^{२} + खा^{२} = २\left(क\,घ^{२} + \frac{का^{२}}{४}\right)$$

$$= २क\,घ^{२} + \frac{का^{२}}{२}$$

$$\therefore क\,घ^{२} = \frac{खा^{२}}{२} + \frac{गा^{२}}{२} - \frac{का^{२}}{४}$$

$$क\,घ = \frac{१}{२}\sqrt{२\,खा^{२} + २\,गा^{२} - का^{२}}$$

इसी प्रकार

$$\text{ख च} = \frac{1}{2}\sqrt{2\,\text{गा}^2 + 2\,\text{का}^2 - \text{खा}^2}$$

$$\text{ग छ} = \frac{1}{2}\sqrt{2\,\text{का}^2 + 2\,\text{खा}^2 - \text{गा}^2}$$

तथा

$$\text{कोस्प क घ ग} = \frac{\text{घ त}}{\text{क त}} = \frac{1}{2}\,\frac{\text{ख त} - \text{ग त}}{\text{क त}}$$

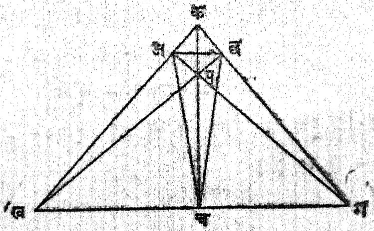
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\text{ख त}}{\text{क त}} - \frac{\text{ग त}}{\text{क त}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\,(\text{कोस्प ख} - \text{कोस्प ग})$$

(१५७) पाद-त्रिभुज (Pedal-triangle)—

त्रिभुज च छ ज जो कि क, ख, ग से सामने की भुजाओं पर डाले हुये लम्बों (perpendiculars) के पाद विन्दुओं (feet) को मिलाने से बनता है पाद-त्रिभुज कहलाता है। विन्दु प, जिस पर ये लम्ब मिलते हैं लाम्बिक-केन्द्र (Orthocentre) कहलाता है।

(१५८) त्रिभुज की भुजाओं एवं कौणिक विन्दुओं से लाम्बिक-केन्द्र की दूरी—



$$\text{प च} = \text{ख च स्प प ख च} = \text{ख च स्प}\,(90^\circ - \text{ग})$$

$$= \text{क ख कोज्या ख कोस्प ग}$$

$= \frac{\text{गा}}{\text{ज्या ग}}$ कोज्या ख कोज्या ग

= २ त्रा कोज्या ख कोज्या ग

उसी प्रकार प छ = २ त्रा कोज्या ग कोज्या क

प ज = २ त्रा कोज्या क कोज्या ख

प क = क छ व्युको ग क च

= गा कोज्या क व्युको ग क च

= गा कोज्या क व्युको (९०° − ग)

= गा कोज्या क व्युज्या ग

$= \frac{\text{गा}}{\text{ज्या ग}}$ कोज्या क

= २ त्रा कोज्या क

उसी प्रकार प ख = २ त्रा कोज्या ख, प ग = २ त्रा कोज्या ग

(१५६) पाद त्रिभुज के कोण एवं भुजायें ज्ञात करना—

प छ ग च एक चक्रीय (cyclic) चतुर्भुज है क्योंकि

∠ प छ ग + ∠ प च ग = २ समकोण

∴ ∠ प च छ = ∠ प ग छ = ९०° − क

उसी प्रकार ∠ प च ज = ९०° − क

∴ ∠ छ च ज = ∠ प च छ + ∠ प च ग

= ९०° − क + ९०° − क

= १८०° − २ क

इसी प्रकार पाद-त्रिभुज के शेष कोण भी १८०° − २ ख, १८०° − २ ग हैं।

△ क छ ज में

छ ज² = क छ² + क ज² − २ क छ . क ज कोज्या क

= गा² कोज्या² क + खा² कोज्या² क − २ खा गा कोज्या³ क

$= (खा^2 + गा^2 - २ \text{ खा गा कोज्या क}) \text{ कोज्या}^2 \text{ क}$

$= का^2 \text{ कोज्या}^2 \text{ क}$

छ ज = का कोज्या क

उसी प्रकार शेष भुजायें खा कोज्या ख, गा कोज्या ग होंगी।

(१६०) परिकेन्द्र (circum-centre) और लाम्बिक केन्द्र (orthocentre) की दूरी निकालना—

क ख ग एक त्रिभुज है जिसका प लाम्बिक केन्द्र है अ परिकेन्द्र है।

प क = २ त्रा कोज्या क, अ क = त्रा

$\angle \text{ अ क प} = \angle \text{ ख क प} - \angle \text{ छ क अ}$

$$= \left(\frac{\pi}{२} - ख\right) - \left(\frac{\pi}{२} - ग\right)$$

$= ग - ख$

$\therefore \text{ प अ}^2 = \text{क अ}^2 + \text{क प}^2 - २ \text{ क अ . क प कोज्या अ क प}$

$= त्रा^2 + ४ त्रा^2 \text{ कोज्या}^2 \text{ क} - ४ त्रा^2 \text{ कोज्या क}$
$\text{कोज्या } (ग - ख)$

$= त्रा^2 + ४ त्रा^2 \text{ कोज्या क } \{\text{कोज्या क} - \text{कोज्या } (ग - ख)\}$

$= त्रा^2 + ४ त्रा^2 \text{ कोज्या क } \{-\text{कोज्या } (ख + ग)$
$- \text{कोज्या } (ग - ख)\}$

$= त्रा^2 - ४ त्रा^४ \text{ कोज्या क } \{\text{कोज्या } (ख + ग) + \text{कोज्या}$
$(ग - ख)\}$

$= त्रा^2 - ८ त्रा^2 \text{ कोज्या क कोज्या ख कोज्या ग}$

$\therefore \text{ प अ} = त्रा \sqrt{१ - ८ \text{ कोज्या क कोज्या ख कोज्या ग}}$

अभ्यास २९

उ, $उ_1$, $उ_2$, $उ_3$ क्रमशः अन्तःवृत्त तथा वाह्यवृत्तों के केन्द्र हैं, सिद्ध करो कि—

(१) $उ क = त्र \text{ व्युज्या } \frac{क}{२} = ४ \text{ त्रा ज्या } \frac{ख}{२} \text{ ज्या } \frac{ग}{२}$

(उत्तर प्रदेश १९३७)

(२) $उ_1 क = त्र_1 \text{ व्युज्या } \frac{क}{२} = ४ \text{ त्रा कोज्या } \frac{ख}{२} \text{ कोज्या } \frac{ग}{२}$

(३) $उ उ_1 = का \text{ व्युको } \frac{क}{२}$ (उत्तर प्रदेश १९३०)

(४) $उ_2 उ_3 = का \text{ व्युज्या } \frac{क}{२}$

(५) $\frac{क उ}{क उ_1} + \frac{ख उ}{ख उ_2} + \frac{ग उ}{ग उ_3} = १$

(६) $उ उ_1 . उ उ_2 . उ उ_3 = १६ त्रा^2 त्र$ (नागपुर १९३१)

(७) $क उ . उ उ_1 = ख उ . उ उ_2 = ग उ . उ उ_3 = ४ त्रा त्र$

(८) $\triangle उ_1 उ_2 उ_3 = ८ त्रा^2 \text{ कोज्या } \frac{क}{२} \text{ कोज्या } \frac{ख}{२} \text{ कोज्या } \frac{ग}{२}$

$$= \frac{का \text{ खा } गा}{२ त्र}$$

(९) $\frac{क उ . ख उ . ग उ}{का \text{ खा } गा} = \frac{त्र}{त्रा}$

(१०) $\frac{खा \; गा}{क उ_1^2} + \frac{गा \; का}{ख उ_2^2} + \frac{का \; खा}{ग उ_3^2} = १$

(११) $का . क उ^2 + खा . ख उ^2 + गा . ग उ^2 = का . खा . गा$

(१२) $\frac{उ उ_1 . उ_2 उ_3}{ज्या क} = \frac{उ उ_2 . उ_3 उ_1}{ज्या ख} = \frac{उ उ_3 . उ_1 उ_2}{ज्या ग}$

प, उ, $उ_1$, म, अ क्रमशः लाम्बिक केन्द्र, अन्तः केन्द्र, वाह्यकेन्द्र, गुरुत्वकेन्द्र एवं परिकेन्द्र हैं, सिद्ध करो कि—

(१३) $अ उ^2 = त्रा^2 - २ त्रा त्र$ (उत्तर प्रदेश १९४९)

(१४) $अ उ_1^2 = त्रा^2 + २ त्रा त्र_1$

(१५) $उ प = २ त्र^2 - ४ त्रा^2$ कोज्या क कोज्या ख कोज्या ग

(१६) $अ म^2 = त्रा^2 - \frac{1}{9} (का^2 + खा^2 + गा^2)$

(१७) $\triangle उ अ प = २ त्रा^2$ ज्या $\frac{ख - ग}{२}$ ज्या $\frac{ग - क}{२}$ ज्या $\frac{क - ख}{२}$

(१८) सिद्ध करो कि किसी त्रिभुज की माध्यिकाओं (medians) के वर्ग का योग उसको भुजाओं के वर्ग के योग का तीन-चौथाई होता है।

(१९) यदि किसी त्रिभुज के कोणिक विन्दुओं से लाम्बिक केन्द्र की दूरी क्रमशः य, र, ल हो तो सिद्ध करो कि

$$\frac{य}{कोज्या क} = \frac{र}{कोज्या ख} = \frac{ल}{कोज्या ग} = २ त्रा$$

(राजपूताना, १९४२)

(२०) यदि किसी त्रिभुज के कोणिक विन्दुओं (angular points) से अन्तः वृत्त के स्पर्श-विन्दुओं की क्रमशः दूरी य, र, ल हैं तो सिद्ध करो कि

$$त्र^2 = \frac{य . र . ल}{य + र + ल}$$ (उत्तर प्रदेश १९४१)

(२१) क ख ग त्रिभुज के वाह्य केन्द्र $उ_1$, $उ_2$ $उ_3$ हैं तो सिद्ध करो कि

(१) $\triangle$ $उ_1$ $उ_2$ $उ_3$ की भुजायें ४ त्रा कोज्या $\frac{क}{२}$,

४ त्रा कोज्या $\frac{ख}{२}$, ४ त्रा कोज्या $\frac{ग}{२}$ हैं

(२) उसके कोण $\frac{\pi}{२} - \frac{क}{२}, \frac{\pi}{२} - \frac{ख}{२}, \frac{\pi}{२} - \frac{ग}{२}$ हैं

(३) इसका क्षेत्रफल २ त्रा अ है। (नागपुर १६४०, १६४४)

(२२) किसी त्रिभुज क ख ग के कोणिक बिन्दुओं से सामने की भुजाओं पर क्रमशः $ल_1$, $ल_2$, $ल_3$ लम्ब हैं, सिद्ध करो कि

(१) $\frac{१}{ल_1} + \frac{१}{ल_2} + \frac{१}{ल_3} = \frac{१}{त्र_1} + \frac{१}{त्र_2} + \frac{१}{त्र_3}$ (नागपुर १६४६)

(२) $८ त्रा^2 = \frac{का^2 \; खा^2 \; गा^2}{ल_1 \; ल_2 \; ल_3}$ (उत्तर प्रदेश १६३१, १६३६)

(२३) त्रिभुज क ख ग के परिकेन्द्र से का, खा, गा भुजाओं पर पड़े हुये लम्बों की लम्बाई क्रमशः य, र, ल हैं, सिद्ध करो कि

$\frac{का}{य} + \frac{खा}{र} + \frac{गा}{ल} = \frac{का \; खा \; गा}{४ \; य \; र \; ल}$ (उत्तर प्रदेश १६४०)

(२४) सिद्ध करो कि किसी दिये हुए त्रिभुज के पाद त्रिभुज (pedal triangle) के परिवृत्त (circum-circle) की त्रिज्या $\frac{१}{२}$ त्रा के बराबर होती है। (उत्तरप्रदेश १६४६)

(२५) सिद्ध करो कि त्रिभुज क ख ग में शीर्षक से आधार ख ग पर गिराये गये लम्ब के पाद और ख ग के मध्यविन्दु के बीच की दूरी $\frac{खा^2 - गा^2}{२ \; का}$ है। (उत्तर प्रदेश प्रथम परीक्षा १६४६)

(२६) संशयात्मक स्थिति में दो त्रिभुजों के अन्तः वृत्त की त्रिज्यायें त्र,

त्र' है, सिद्ध करो कि $\frac{१}{त्र} + \frac{१}{त्र'}$

$$= \frac{२}{ज्या\ क}\left(\frac{कोज्या\ क}{खा - का} + \frac{१}{कोज्या\ ख}\right),$$

जबकि का, खा, क दिये हुये हैं।

(२७) सिद्ध करो कि कोण क से नव-विन्दु-वृत्त (nine-point-circle) की दूरी $\frac{१}{२}$ त्रा $\sqrt{१ + कोज्या\ क\ ज्या\ ख\ ज्या\ ग}$ होती है।

(२८) त्रिभुज क ख ग के क विन्दु से होते हुये और ख ग भुजा को क्रमशः ख और ग विन्दुओं पर स्पर्श करते हुये वृत्त खींचे गये हैं। सिद्ध करो कि परिवृत्त का क्षेत्रफल अन्य दो वृत्तों के क्षेत्रफल का मध्यमानानुपाती होगा।

यह भी सिद्ध करो कि उस वृत्त की त्रिज्या, जो क विन्दु में होकर ख ग भुजा को मध्य विन्दु पर स्पर्श करता हुआ खींचा जाय,

$$\frac{२(खा^२ + गा^२) - का^२}{८\ खा\ ज्या\ ग}$$

होती है।

(२९) यदि किसी त्रिभुज के कोणिक विन्दुओं से सामने की भुजाओं पर डाले गये लम्बों की लम्बाई $ल_१, ल_२, ल_३$ हो और परिकेन्द्र से इन भुजाओं पर डाले गये लम्बों की लम्बाई क्रमशः $प_१, प_२, प_३$ हो, सिद्ध करो कि

$$(१)\ \frac{त्र - प_१}{ल_१} + \frac{त्र - प_२}{ल_२} + \frac{त्र - प_३}{ल_३} = ०$$

$$(२)\ ४\left(\frac{१}{ल_१^२} + \frac{१}{ल_२^२} + \frac{१}{ल_३^२}\right) = \frac{१}{त्र^२} + \frac{१}{त्र_१^२} + \frac{१}{त्र_२^२} + \frac{१}{त्र_३^२}$$

(३०) किसी त्रिभुज के कोणों के अर्धकों की लम्बाई क्रमशः प, फ, ब, हैं सिद्ध करो कि

$$(\text{खा}+\text{गा})^2 \frac{\text{प}^2}{\text{खा गा}} + (\text{गा}+\text{का})^2 \frac{\text{फ}^2}{\text{गा का}} + (\text{का}+\text{खा})^2 \frac{\text{ब}^2}{\text{का खा}} = (\text{का}+\text{खा}+\text{गा})^2$$

(३१) यदि त्रिभुज क ख ग के कोण ग का अर्धक, क ख भुजा को च विन्दु पर और परिवृत्त को छ विन्दु पर काटता हो तो सिद्ध करो कि

$$\frac{\text{ग छ}}{\text{च छ}} = \frac{(\text{का}+\text{खा})^2}{\text{गा}^2}$$

(नागपुर १६४४)

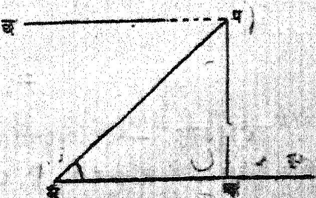
अध्याय १५

त्रिकोणमिति का व्यावहारिक प्रयोग
ऊँचाई एवं दूरियाँ

(Application of Trigonometry. Heights and Distances)

(१६१) त्रिकोणमिति का सबसे महत्वपूर्ण एवं व्यावहारिक प्रयोग अगम्य एवं अप्राप्य स्थानों के बीच की दूरी एवं ऊँचाई निर्धारित करने में होता है। जिन स्थानों में पहुँच सकते हैं उनको विशेष मापों, जैसे जंजीर, फुट या गज के द्वारा नाप सकते हैं, किंतु जिन स्थानों के पास पहुँचना कठिन है, उनके बीच की दूरी या ऊँचाई नापने के लिये क्वाड-रैंट, सेक्सटेंट या थेओडोलाइट के द्वारा उन दो स्थानों के बीच का कोण नापते हैं। तदोपरान्त ज्यामिति और त्रिकोणमिति की सहायता से उन कोणों का प्रयोग करके दूरी की गणना करते हैं।

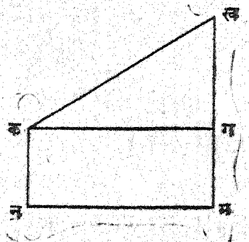
(१६२) परिभाषा—मान लो प किसी ऊँचाई पर एक विन्दु है जिससे खींची हुई ऊर्ध्वाधर (Vertical) रेखा किसी क्षैतिज (horizontal) रेखा म च के च विन्दु पर मिलती है। विन्दु प से म च के समानान्तर प छ रेखा खींचो।



कोण प म च, म से प का **उन्नतांश कोण** (Angle of Elevation) कहलाता है। इसे प की **कोणीय ऊँचाई** (angular height) भी कहते हैं।

कोण छ प म, प से म का **अवनतांश कोण** (Angle of Depression) कहलाता है। इसे **नतांश** कोण भी कहते हैं।

(१६३) उदाहरण १—दर्शक से वृक्ष १०० गज पर है, और वृक्ष की चोटी ३०° का कोण बनाती है। यदि भूमि से दर्शक की आँख की ऊँचाई ३ फीट हो तो वृक्ष की ऊँचाई बताओ।



यदि क दर्शक की आँख हो, ख वृक्ष की चोटी और ग वृक्ष पर वह विन्दु हो जहाँ क से वृक्ष पर गिराया गया लम्ब पड़ता है, तो

कोण ख क ग = ३०°

$$\frac{\text{ख ग}}{\text{क ग}} = \text{स्प } ३०^\circ = \frac{१}{\sqrt{३}}$$

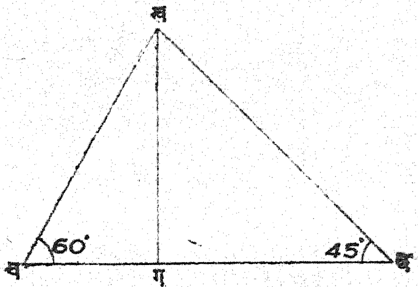
$$\therefore \text{ख ग} = \text{क ग}\frac{१}{\sqrt{३}} = \frac{१००}{\sqrt{३}} \text{ गज}$$

$$\text{वृक्ष की ऊँचाई} = \text{ख म} = \text{ख ग} + \text{ग म} = \left(\frac{१००}{\sqrt{३}} + १\right)\text{गज}$$

$$= \frac{१०० + \sqrt{३}}{\sqrt{३}} \text{ गज}$$

उदाहरण २—दो विन्दुओं से, जिनमें एक मीनार से ठीक उत्तर और दूसरा ठीक दक्षिण में है, एक मीनार की चोटी के उन्नतांश क्रमशः ४५° और ६०° हैं। यदि मीनार की ऊँचाई १०० फीट हो तो उन विन्दुओं के बीच की दूरी बताओ।

मानलो ख ग मीनार है, च और छ क्रमशः उसके दक्षिण एवं उत्तर के विन्दु हैं।



कोण ख छ ग $=$ ४५°, कोण ख च ग $=$ ६०°

$\therefore$ च ग $=$ ख ग कोस्प ६०° $=$ १०० $\cdot \frac{१}{\sqrt{३}} = \frac{१००}{\sqrt{३}}$ फीट

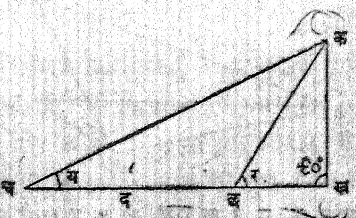
ग छ $=$ ख ग कोस्प ४५° $=$ १०० $\cdot$ १ $=$ १०० फीट

$\therefore$ च छ $=$ च ग $+$ ग छ $= \left(\frac{१००}{\sqrt{३}} + १००\right)$

$= \frac{१०० (\sqrt{३} + १)}{\sqrt{३}}$ फीट

उदाहरण ३—एक दर्शक किसी स्थान पर एक मीनार का उन्नतांश य देखता है। वह सीधे मीनार की ओर द दूरी पर बढ़ आता है और वहाँ मीनार का उन्नतांश र देखता है। सिद्ध करो कि मीनार की ऊँचाई $\frac{\text{द ज्या य ज्या र}}{\text{ज्या (र − य)}}$ होगी।

मान लो क ख मीनार है और च, छ क्रमशः दर्शक के पहिले और दूसरे स्थान हैं।



कोण च क छ = र − य, कोण क छ च = १८०° − र

त्रिभुज क छ च में $\frac{\text{क च}}{\text{ज्या क छ च}} = \frac{\text{च छ}}{\text{ज्या च क छ}}$

$$\therefore \text{क च} = \frac{\text{च छ ज्या } (१८०^\circ - \text{र})}{\text{ज्या } (\text{र} - \text{य})}$$

$$= \frac{\text{द ज्या र}}{\text{ज्या } (\text{र} - \text{य})}$$

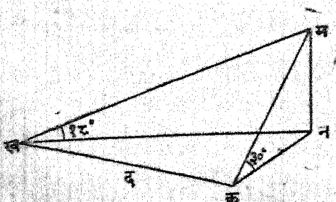
किन्तु क ख = क च ज्या य

$$= \frac{\text{द ज्या र ज्या य}}{\text{ज्या } (\text{र} - \text{य})}$$

उदाहरण ४—स्थान क से देखने पर, जो एक अट्टालिका के ठीक दक्षिण में है, अट्टालिका की कोणीय ऊँचाई ३०° पाई गई। स्थान ख से देखने पर जो क से ठीक पश्चिम की ओर है, और क से दूरी द पर है, अट्टालिका की कोणीय ऊँचाई १८° पाई गई। सिद्ध करो कि अट्टालिका की ऊँचाई $\frac{\text{द}}{\sqrt{(२+२\sqrt{५})}}$ है।

(उत्तर प्रदेश पूरक १६४८)

मान लो म न अट्टालिका है जिसकी म चोटी है। क अट्टालिका के दक्षिण में है और ख, क से पश्चिम में द दूरी पर है।



अतः कोण म न क, म न ख एवं ख क न सभी समकोण हैं।

कोण म क न = ३०°, कोण म ख न = १८°, क ख = द

मानलो कि अट्टालिका की ऊँचाई य है,

त्रिभुज म क न में, क न = म न कोस्प ३०° = य . $\sqrt{३}$

त्रिभुज म ख न में, ख न = म न कोस्प १८° = $\frac{य\sqrt{१० + २\sqrt{५}}}{\sqrt{५} - १}$

त्रिभुज क ख न में

$$ख न^२ = क ख^२ + क न^२$$

$$\frac{य^२(१० + २\sqrt{५})}{(\sqrt{५} - १)^२} = द^२ + ३ य^२$$

$$\frac{य^२(५ + \sqrt{५})}{३ - \sqrt{५}} - ३य^२ = द^२$$

$$य^२\left(\frac{५ + \sqrt{५} - ९ + ३\sqrt{५}}{३ - \sqrt{५}}\right) = द^२$$

$$४ य^२\left(\frac{\sqrt{५} - १}{३ - \sqrt{५}}\right) = द^२$$

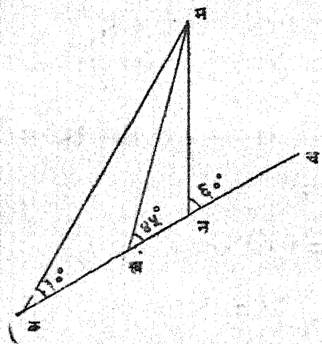
$$४ य^२ \frac{(\sqrt{५} - १)(३ + \sqrt{५})}{९ - ५} = द^२$$

$$य^२ (२ + २\sqrt{५}) = द^२$$

$$\therefore य = \frac{द}{\sqrt{(२ + २\sqrt{५})}}$$

उदाहरण ५—एक ऊर्ध्वाधर (Vertical) मीनार किसी झुकी हुई पहाड़ी पर स्थित है। जो कि मीनार के साथ ६०° का कोण बनाती है। पहाड़ी के क और ख दो विन्दुओं पर मीनार क्रमशः ३०° तथा ४५° के कोण बनाती है। यदि क ख की दूरी १०० गज हो तो मीनार की ऊँचाई बताओ।

मानलो क ख न च पहाड़ी है और म न मीनार है।



क ख = १०० गज, $\angle$ म क ख = ३०°, $\angle$ म ख न = ४५°,
$\angle$ मनच = ६०°

त्रिभुज म ख न से

$$\frac{\text{म न}}{\text{म ख}} = \frac{\text{ज्या } ४५^\circ}{\text{ज्या } (१८०^\circ - ६०^\circ)} = \frac{\frac{१}{\sqrt{२}}}{\frac{\sqrt{३}}{२}} = \sqrt{\frac{२}{३}} \quad \ldots\ldots (१)$$

त्रिभुज म क ख से

$$\frac{\text{म ख}}{\text{क ख}} = \frac{\text{ज्या } ३०^\circ}{\text{ज्या } (४५^\circ - ३०^\circ)} = \frac{\frac{१}{२}}{\frac{\sqrt{३} - १}{२\sqrt{२}}} = \frac{\sqrt{२}}{\sqrt{३} - १} \quad (२)$$

(१) और (२) का गुणा करके

$$\frac{\text{म न}}{\text{क ख}} = \frac{२}{३ - \sqrt{३}}$$

$$\therefore \text{मन} = \frac{२००}{३ - \sqrt{३}} = \frac{१०० (३ + \sqrt{३})}{३}$$

$$= १०० \left(१ + \frac{१}{\sqrt{३}} \right)$$

अभ्यास ३०

(१) एक मीनार के पाद से ५०० गज की दूरी पर उसकी चोटी का उन्नतांश ३०° है। मीनार की ऊँचाई बताओ।

(२) एक आदमी किसी स्थान पर एक मीनार का उन्नतांश १५° देखता है। वह सीधे मीनार की ओर क दूरी तक बढ़ जाता है और वहाँ मीनार का उन्नतांश ७५° देखता है। मीनार की ऊँचाई बताओ।

(३) किसी स्थान पर एक मीनार का उन्नतांश ४५° है। यदि मीनार की ठीक सीध में उस स्थान से १०० गज पीछे हट जाने पर उन्नतांश ३०° रह जाता है तो मीनार की ऊँचाई बताओ।

(४) ५०० फीट ऊँची पहाड़ी से उसके पाद में होकर जाने वाली क्षैतिज रेखा पर एक ही ओर दो स्थानों के नतांश ४५° और ३०° देखे गये हैं। उन स्थानों के बीच की दूरी बताओ।

(५) किसी चिमनी के पाद से ६० फीट की दूरी पर उसके सिरे का उन्नतांश उसी क्षैतिज रेखा में १३५ फीट की दूरी के उन्नतांश से दूना है। चिमनी की ऊँचाई ज्ञात करो।

(६) ६० फीट ऊँचा ताड़ का पेड़ आँधी से बीच में टूटकर जमीन तक ६०° झुक गया है। बताओ कि पेड़ कितनी ऊँचाई से टूटा है ?

(७) किसी स्थान पर एक मीनार और उस पर लगी हुई झण्डी की डंडी के क्रमशः उन्नतांश ३०° और ६०° हैं। मीनार की ओर क फीट बढ़कर मीनार का उन्नतांश ६०° है। मीनार और झण्डी की ऊँचाइयाँ बताओ।

(८) एक हवाई जहाज से किसी सीधी सड़क पर स्थित दो गाँवों के नतांश ४५° और ६०° देखे गये। यदि गाँवों के बीच की दूरी १ मील हो तो हवाई जहाज़ कितनी ऊँचाई पर था ?

(९) ६० फीट ऊँचे खम्भे के ऊपर ३० फीट ऊँची एक लोहे की

छड़ है। बताओ आधार में उससे ४० फीट की दूरी पर छड़ के द्वारा कितना कोण बनेगा जबकि कोस्प १०३११'३६'१४'' = १०$\frac{1}{3}$।

(१०) एक मीनार की परछाईं सूर्य के उन्नतांश ३०° से ४५ हो जाने पर ६० फीट घट गई। मीनार की ऊँचाई बताओ।

(११) २०० फीट ऊँची पहाड़ी के सिरे से एक चिमनी के दोनों सिरों के अवनतांश ३०° और ६०° हैं। चिमनी की ऊँचाई बताओ।

(१२) एक आदमी समान ऊँचाई की दो चिमनियों के बीच में पादों को मिलाने वाली रेखा पर खड़ा है। वहाँ से निकट की चिमनी का उन्नतांश ६०° है। उस रेखा से समकोण बनाने वाली दिशा में ८० गज चलने पर उनके सिरों के उन्नतांश क्रमशः ४५° एवं ३०° हैं। उनकी ऊँचाई एवं बीच की दूरी ज्ञात करो।

(१३) एक वर्गाकार मीनार एक क्षैतिज धरातल में स्थित है। इस धरातल के एक बिन्दु से मीनार के तीन कोने दिखाई देते हैं जिनके उन्नतांश कोण क्रमशः ४५°, ६०°, ४५° हैं। मीनार की ऊँचाई और चौड़ाई की निष्पत्ति बताओ।

(१४) एक मीनार पर झण्डे का बाँस गढ़ा हुआ है। आधार के धरातल के किसी बिन्दु पर उनके उन्नतांश कोण क्रमशः र और य+र हैं। मीनार की ओर सीधे क फीट चलने पर बाँस उस बिन्दु पर य कोण बनाता है। सिद्ध करो कि मीनार की ऊँचाई

$$\frac{\text{क स्प र}}{\text{१}-\text{स्प र स्प (य+र)}} \text{ है।}$$

(१५) एक मीनार घ म किसी क्षैतिज धरातल में स्थित है। क ख ग घ धरातल में एक सीधी रेखा है। क, ख, ग बिन्दुओं पर मीनार के उन्नतांश क्रमशः १ : २ : ३ के अनुपात से हैं। यदि क ख और ख ग क्रमशः ५० फी० और २० फी० हों तो मीनार की ऊँचाई एवं ग घ की दूरी बताओ।

(१६) एक मीनार के ठीक दक्षिण में स्थित किसी विन्दु से उसकी कोणीय ऊँचाई त है। इस विन्दु से द दूरी पर ठीक पश्चिम की ओर किसी स्थान से उसकी कोणीय ऊँचाई थ है। सिद्ध करो कि मीनार

की ऊँचाई $\dfrac{द}{\sqrt{कोस्प^2 थ - कोस्प^2 त}} = \dfrac{द\ ज्या\ त\ ज्या\ थ}{\sqrt{ज्या^2 त - ज्या^2 थ}}$ है।

(दिल्ली १६४८ उत्तर प्रदेश १६२६, १६३८, १६४०, १६४४)

(१७) किसी मीनार पर स्थित २० फीट ऊँची चिमनी के द्वारा मीनार के पाद से ७० फीट की दूरी पर स्प$^{-1}$ २ का कोण बनता है। मीनार की ऊँचाई बताओ।

(१८) एक प्रकाशगृह (Light house) से किन्हीं दो जहाजों के नतांश कोण पूर्व दिशा में ४५° और ३०° हैं। यदि उनके बीच की दूरी २०० फीट हो तो प्रकाशगृह की ऊँचाई बताओ।

(राजपूताना १६४६)

(१६) यदि किसी पहाड़ की चोटी का उन्नतांश किसी अज्ञात दूरी से २८° है और उस दूरी की अपेक्षा २ मील ७७ गज अधिक दूरी से उसी रेखा में स्थित विन्दु से उन्नतांश केवल १६° है तो बताओ पहाड़ कितना ऊँचा है जब कि

लघु १·६०७१ = ·२०६०
सालघु ज्या १६° = ६·४४०३, सालघु ज्या २८° = ६·६७१६
सालघु ज्या १२° = ६·३१७६

(उत्तर प्रदेश १६२८, १६४१, १६४५, १६४६)

(२०) एक ऊर्ध्वाधर खम्भे (१००फीट से अधिक ऊँचा) के दो भाग हैं। नीचे का भाग समस्त का तिहाई है। खम्भे के पाद से ४० फीट दूरी पर पाद के क्षैतिज धरातल में स्थित एक विन्दु पर खम्भे के

ऊपर के भाग द्वारा ऐसा कोण बनता है जिसका स्प $\frac{1}{2}$ है। खम्भे की ऊँचाई ज्ञात करो। (उत्तर प्रदेश १९२०)

(२१) एक ऊर्ध्वाधर मीनार किसी झुकी हुई पहाड़ी पर स्थित है जो कि मीनार के साथ य कोण बनाती है। पहाड़ी के एक ही ओर क और ख दो विन्दुओं पर मीनार क्रमशः र तथा र – ल कोण बनाती है। यदि क ख की दूरी द हो तो सिद्ध करो कि मीनार की ऊँचाई

$$\frac{\text{द ज्या ल ज्या र}}{\text{ज्या य ज्या (ल – र)}}$$

होगी।

(२३) किसी ऊर्ध्वाधर मीनार का क पाद है। क के ठीक पूर्व में ख और ग दो विन्दु है तथा घ ठीक दक्षिण में। ख पर मीनार के सिरे का उन्नतांश कोण ग पर के उन्नतांश का दूना है। घ पर क ख रेखा $स्प^{-1} \frac{1}{2}$ कोण बनाती है। ख ग और ग घ क्रमशः २० फीट तथा ३० फीट है। मीनार की ऊँचाई बताओ।

(२३) किसी झील के धरातल से क ऊँचाई पर स्थित किसी विन्दु पर बादल के एक टुकड़े का उन्नतांश कोण र है और झील में बादल की परछाईं का अवनतांश कोण य है। सिद्ध करो कि झील के धरातल से बादल की ऊँचाई

$$\frac{\text{क ज्या (य + र)}}{\text{ज्या (य – र)}}$$ (आंध्र १९४८ उत्तर प्रदेश १९४२)

है।

(२४) एक जहाज ६० मील प्रति घण्टे के वेग से ठीक पूर्व की ओर जा रहा है। एक दर्शक उसको उत्तर की ओर $१०\frac{3}{4}°$ की कोणीय ऊँचाई पर देखता है। दो मिनट के बाद वह उसे उत्तर-पूर्व में उसी कोणीय ऊँचाई पर देखता है। तो बताओ कि वह किस वेग से ऊपर को उठ रहा है?

(२५) एक पदार्थ के ठीक नीचे किसी क्षैतिज रेखा में क, ख, ग तीन विन्दु हैं। ख और क पर पदार्थ की कोणीय ऊँचाई ग पर की

कोणीय ऊँचाई से क्रमशः दुगुनी एवं तिगुनी है। यदि कख = का एवं खग = खा हो तो सिद्ध करो कि पदार्थ की ऊँचाई

$$\frac{\text{का}}{२\ \text{खा}}\sqrt{(\text{का} + \text{खा})\ (३\ \text{खा} - \text{का})}\ \text{है।}$$

(उत्तर प्रदेश १६४३)

(२६) एक वस्तु क, ख, ग तीन स्थानों से निरीक्षण की गई है। ये स्थान एक ऐसी क्षैतिज सरल रेखा पर स्थित हैं, जो उस वस्तु के नीचे होकर जाती है। यदि क, ख, ग पर उन्नतांश कोण क्रमशः थ, २ थ और ३ थ हों तो सिद्ध करो कि

$$४\ \text{ज्या}^2\ \text{थ} = ३\ \text{खा} - \text{का जहाँ कख} = \text{का},\ \text{खग} = \text{खा}$$

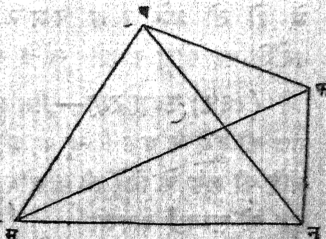
(२७) २ का लम्बे आधार के प्रत्येक सिरे पर किसी पहाड़ की चोटी की कोणीय ऊँचाई र है और उसके मध्य विन्दु पर कोणीय ऊँचाई य है। सिद्ध करो कि चोटी की ऊर्ध्वाधर ऊँचाई

$$\frac{\text{का ज्या य ज्या र}}{\sqrt{\text{ज्या (य} + \text{र) ज्या (य} - \text{र)}}}\ \text{है।}$$

(बनारस १६४०)

---

(१६४) दो अगम्य (inaccessible) स्थानों के बीच की दूरी ज्ञात करना—



मानलो प और फ दो अगम्य विन्दु हैं। किसी ज्ञात का दूरी पर आधार में म और न ऐसे दो विन्दु लो जिनसे प और फ दोनों ही दृष्टिगोचर हो सकें।

म पर कोण पमफ (= क), ∠ फमन (= ख), ∠ पमन (= ग) तथा न पर ∠ पनम (= घ), ∠ फनम (= ङ) नापो

△ पमन में

$$\frac{\text{म प}}{\text{ज्या म न प}} = \frac{\text{म न}}{\text{ज्या म प न}}$$

$$\frac{\text{म प}}{\text{ज्या घ}} = \frac{\text{का}}{\text{ज्या } (१८०^\circ - \text{ग} - \text{घ})}$$

$$= \frac{\text{का}}{\text{ज्या } (\text{ग} + \text{घ})}$$

$$\therefore \text{म प} = \frac{\text{का ज्या घ}}{\text{ज्या } (\text{ग} + \text{घ})}$$

उसी प्रकार त्रिभुज फ म न में

$$\text{म फ} = \frac{\text{का ज्या ङ}}{\text{ज्या } (\text{ख} + \text{ङ})}$$

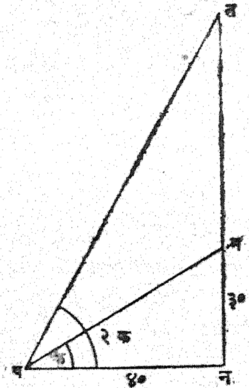
अब त्रिभुज म प फ में म प, म फ और बीच का कोण प म फ (= क) ज्ञात है।

अत: लघुगणकों की सहायता से त्रिभुज को निर्धारित करके प फ का मान ज्ञात किया जा सकता है।

टिप्पणी—यदि प, फ, न और म चारों विन्दु एक ही समतल में हों तो हमें कोण प म न नापने की आवश्यकता नहीं पड़ेगी क्योंकि वह कोण क और ख के योग के बराबर होगा।

(१६५) उदाहरण—तीस गज ऊँचाई की मीनार के पाद से ४० गज की दूरी के एक विन्दु पर मीनार के सिरे तथा उसके ऊपर स्थित लोहे की छड़ के सिरे की कोणीय ऊँचाई में १ और २ का अनुपात है। छड़ की लम्बाई बताओ

मानलो म न मीनार पर त म लोहे की छड़ है। प पर म की कोणीय ऊँचाई थ है अत: त की कोणीय ऊँचाई २ थ हुई।



मान लो तम = य

$\therefore$ स्प थ $= \dfrac{\text{मन}}{\text{पन}} = \dfrac{३०}{४०} = \dfrac{३}{४}$

स्प २थ $= \dfrac{\text{तन}}{\text{पन}} = \dfrac{\text{तम} + \text{मन}}{\text{पन}} = \dfrac{\text{य} + ३०}{४०}$

$\therefore \dfrac{\text{य} + ३०}{४०} =$ स्प २थ $= \dfrac{२ \text{ स्प थ}}{१ - \text{स्प}^२ \text{ थ}}$

$= \dfrac{२ \cdot \frac{३}{४}}{१ - \frac{९}{१६}} = \dfrac{२४}{७}$

७ य = ९६० − २१०

= ७५०

य = १०७$\frac{३}{७}$ गज

अभ्यास ३१

(१) एक मीनार के दो भाग हैं, ऊपर का भाग १२ फी० और नीचे का १३ फी० । मीनार के पाद से कितनी दूरी पर ५ फीट ऊँचा आदमी देखे कि उसकी आँख पर मीनार के दोनों भाग बराबर-बराबर कोण बनावें ।

(२) मीनार के आधार से खिंची हुई किसी क्षैतिज रेखा में आधार से क और ख दूरी पर दो विन्दुओं पर मीनार के सिरे के उन्नतांश कोण एक दूसरे के कोटि हैं । सिद्ध करो कि मीनार की ऊँचाई $\sqrt{\text{क ख}}$ है । यदि उन विन्दुओं को मिलाने वाली रेखा मीनार के सिरे पर थ कोण बनावे, सिद्ध करो कि

$$\text{ज्या थ} = \frac{\text{क} \sim \text{ख}}{\text{क} + \text{ख}}$$

(३) क्षैतिज धरातल पर स्थित किसी मीनार के सिरे पर झण्डी का बाँस लगा हुआ है । एक दर्शक मीनार की ओर आता हुआ दो स्थानों पर बाँस के द्वारा बना हुआ एक ही कोण थ देखता है । पहिले स्थान पर मीनार की कोणीय ऊँचाई क है । यदि उन दोनों स्थानों के बीच की दूरी च हो तो सिद्ध करो कि मीनार की ऊँचाई—

$$\frac{\text{च ज्या क कोज्या (थ + क)}}{\text{कोज्या (थ + क)}}$$

तथा बाँस की लम्बाई

$$\frac{\text{च ज्या थ}}{\text{ज्या (थ + २क)}}$$ होगी ।

(४) एक लोहे की कील वर्गाकार मीनार के ठीक बीच में गढ़ी हुई है । आधार की किसी भुजा के ठीक मध्य से १०० फीट की लम्ब-दूरी पर कील का केवल सिरा दिखाई देता है । उसी दिशा में १०० फीट और आगे बढ़कर मीनार के सिरे और कील के सिरे के उन्नतांश कोण

ऐसे हैं जिनके स्प क्रमशः $\frac{१}{३}$ और $\frac{५}{६}$ हैं। मीनार की ऊँचाई एवं छड़ की लम्बाई बताओ।

(५) एक पहाड़ी के सिरे से समतल में स्थित किसी विन्दु का नतांश कोण ३०° है। उस सिरे से पहाड़ी पर के रास्ते का तीन चौथाई नीचे आकर उसी विन्दु का नतांश कोण १५° है। यदि पहाड़ी का झुकाव (inclination) थ हो तो सिद्ध करो कि

$$\text{कोस्प थ} = \frac{३\sqrt{३} - २}{२}$$

(६) एक मीनार उत्तर की ओर झुकी हुई है। उसके दक्षिण में पाद से क और ख दूरी पर दो स्थान हैं। यदि इन स्थानों से मीनार की कोणीय ऊँचाई क्रमशः य और र हो तो सिद्ध करो कि मीनार ऊर्ध्वाधर रेखा के साथ

$$\text{स्प}^{-१} \frac{\text{ख कोस्प य} - \text{क कोस्प र}}{\text{ख} - \text{क}}$$

कोण बनाती है।

(७) च और छ विन्दुओं पर एक मीनार के सिरे की कोणीय ऊँचाई य और र हैं। विन्दु च मीनार के आधार के धरातल में है। विन्दु छ, धरातल से ख ऊँचाई पर है किन्तु च से उसकी क्षैतिज (horizontal) दूरी क है। सिद्ध करो कि मीनार की ऊँचाई

$$\text{क} \frac{\text{ज्या य ज्या}(\text{र} - \text{म})}{\text{कोज्या म ज्या}(\text{र} - \text{य})}$$

है जहाँ कि स्प म $= \frac{\text{ख}}{\text{क}}$।

(८) एक चिमनी उत्तर की ओर झुकी हुई है। इसके उत्तर और दक्षिण में बराबर दूरी पर क्षैतिज धरातल में दो विन्दु हैं जिनके चिमनी के सिरे से नतांश कोण क और ख है सिद्ध करो कि चिमनी का पृथ्वी से झुकाव

$$स्प^{-1} \frac{२\ ज्या\ क\ ज्या\ ख}{ज्या\ (क - ख)}$$ है।

(९) एक मीनार पर बाँस गड़ा हुआ है। उसके आधार से द दूरी पर बाँस से महत्तम कोण क बनता है। सिद्ध करो कि मीनार की ऊँचाई एवं बाँस की लम्बाई क्रमशः

$$द\ स्प \left(\frac{\pi}{४} - \frac{क}{२}\right) \text{ तथा } २\ द\ स्प\ क$$

हैं।

(१०) एक खड़ी मीनार किसी झुकी हुई चट्टान पर बनी हुई है जो कि क्षैतिज धरातल के साथ १५° का कोण बनाती है। मीनार के तले से चट्टान के ऊपर की ओर एक आदमी ८० फीट चढ़कर देखता है कि वहाँ मीनार ३०° का कोण बनाती है। सिद्ध करो कि मीनार की ऊँचाई ४० ($\sqrt{६} - \sqrt{२}$) फीट है।

(११) एक ही क्षैतिज धरातल पर स्थित क, ख, ग ऊँचाई की तीन मीनारें किसी पहाड़ी के एक बिन्दु पर समान कोण बनाती हैं। यदि उस बिन्दु पर उन मीनारों के आधारों के नतांश कोण क्रमशः य, र, ल हों, तो सिद्ध करो कि

$$\frac{ज्या\ (र - ल)}{क\ ज्या\ य} + \frac{ज्या\ (ल - य)}{ख\ ज्या\ र} + \frac{ज्या\ (य - र)}{ग\ ज्या\ ल} = ०$$

(१२) क, ख, ग तीन बिन्दुओं से जो कि क्षैतिज धरातल में एक ही सीधी रेखा में है (किन्तु वह रेखा मीनार के आधार में होकर नहीं जाती है) किसी मीनार की कोणीय ऊँचाई क्रमशः य, र, ल हैं। यदि कख = खग तो सिद्ध करो कि मीनार की ऊँचाई

$$\frac{क\ ख \sqrt{२}}{\sqrt{कोस्प^{२}\ य + कोस्प^{२}\ ल - २\ कोस्प^{२}\ र}}$$

होगी।

(१३) एक खम्मे के ऊपर बनी हुई मूर्ति खम्मे से ६ और ११ गज की दूरी पर एक ही कोण बनाती है जिसका स्प, ½ है। खम्मे और मूर्ति की लम्बाई बताओ। (राजपूताना १९४३)

(१४) एक व्यक्ति किसी ऐसी पहाड़ी की ढाल पर खड़ा होकर, जिसका झुकाव थ है, देखता है कि पहाड़ी की मूल में गाड़े हुये एक खम्मे के ऊपरी सिरे का उन्नतांश ३०° है। फिर उस स्थान से खम्मे की ओर नीचे उतर कर का दूरी पर उस कोण को ६०° पाता है सिद्ध करो कि खम्मे की ऊँचाई

$$\frac{\text{का}}{२}\left(\sqrt{३}\ \text{व्युको थ} + \text{ज्या थ}\right)$$

होगी।

(१५) क्षितिज-तल में स्थित एक दीवार पर ध्वजा लगी हुई है। निरीक्षक देखता है कि इस समतल में स्थित किसी बिन्दु पर दीवार और ध्वजा क्रमशः थ और फ कोण बनाती हैं। तब वह सीधे दीवार की ओर गा दूर आगे बढ़ता है और देखता है कि ध्वजा फिर भी फ कोण बनाती है। सिद्ध करो कि दीवार की ऊँचाई

$$\frac{\text{गा ज्या थ कोज्या }(\text{थ} + \text{फ})}{\text{कोज्या }(२\text{ थ} + \text{फ})}$$

और ध्वजा की ऊँचाई

$$\frac{\text{गा ज्या फ}}{\text{कोज्या }(२\text{थ} + \text{फ})}$$

होगी।

अध्याय १६

व्युत्क्रम-चक्रीय फल एवं लुप्तीकरण

(Inverse Circular Functions and Elimination)

(१६६) समीकरण ज्या य = क से विदित है कि य एक ऐसा कोण है जिसकी ज्या का मान क है। इसी बात को दूसरे शब्दों में हम ऐसे भी लिख सकते हैं कि य=ज्या$^{-1}$ क। दोनों में कुछ भी भेद नहीं है, फिर भी इतना ध्यान रखना आवश्यक है कि चूँकि ऐसे बहुत से कोण हो सकते हैं जिनकी ज्या का मान क होता है, अतः ज्या$^{-1}$ क केवल उस लघुतम कोण—चाहे धन या ऋण—का द्योतक है जिसकी ज्या 'क' है। ज्या$^{-1}$ क, कोण य को लिखने का एक चिह्न-मात्र (symbol) है। यह चिह्न **'ज्याव्युत्क्रम क'** अथवा **'ज्या ऋण एक क'** पढ़ा जाता है।

ज्या$^{-1}$ क और (ज्या क)$^{-1}$ का भेद समझ लेना चाहिये। पहिले से एक कोण का भाव प्रकट होता है जब कि दूसरे से एक राशि का, जो कि $\frac{१}{\text{ज्या क}}$ अथवा व्युज्या क के बराबर है। पहिला ज्याव्युत्क्रम क है और दूसरा व्युत्क्रमज्या क है।

इसी प्रकार कोज्या$^{-1}$ क का उस लघुतम कोण से—चाहे धन या ऋण-अभिप्राय है जिसकी कोटिज्या क है। स्प$^{-1}$क, व्युज्या$^{-1}$ क, व्युको$^{-1}$, कोस्प$^{-1}$ क आदि की परिभाषा भी इसी रीति से दी जाती है।

$ज्या^{-1} क$, $कोज्या^{-1} क$............आदि व्युत्क्रम-चक्रीय-फल कहे जाते हैं।

(१६७) जिस प्रकार त्रिकोणमिति में $व्युज्या\ य = \frac{१}{ज्या\ य}$;

$व्युको\ य = \frac{१}{कोज्या\ य}$; $कोस्प\ य = \frac{१}{स्प\ य}$ पारस्परिक सम्बन्ध हैं उसी प्रकार व्युत्क्रम-चक्रीय फलों में भी ये सम्बन्ध बने रहते हैं

अर्थात् $व्युज्या^{-1}\ य = ज्या^{-1} \frac{१}{य}$; $व्युको^{-1}\ य = कोज्या^{-1} \frac{१}{य}$;

$कोस्प^{-1}\ य = स्प^{-1} \frac{१}{य}$ क्योंकि यदि $व्युज्या^{-1}\ य = क$

$$य = व्युज्या\ क$$

$$= \frac{१}{ज्या\ क}$$

अथवा $ज्या\ क = \frac{१}{य}$

$\therefore \quad क = ज्या^{-1} \frac{१}{य}$

(१६८) उदाहरण १—$कोज्या^{-1}\ य$ का मान बताओ।

मानलो $ज्या^{-1}\ य = थ$; तो $ज्या\ थ = य$, $कोज्या\ थ = \sqrt{१ - य^२}$

$\therefore कोज्या\ ज्या^{-1}\ य = कोज्या\ थ = \sqrt{१ - य^२}$

उदाहरण २—कोस्प $व्युज्या^{-1}\ य$ का मान बताओ।

मानलो $व्युज्या^{-1}\ य = थ$, तो $व्युज्या\ थ = य$, $कोस्प\ थ = \sqrt{य^२ - १}$

उदाहरण ३—सिद्ध करो कि

$ज्या^{-1}\ य + कोज्या^{-1}\ य = \frac{\pi}{२}$ (बनारस १९४५)

मानलो कि

$$\text{ज्या}^{-1} य = थ, \text{ अतः ज्या } थ = य$$

$$\text{कोज्या}\left(\frac{\pi}{२} - थ\right) = \text{ज्या } थ = य$$

$$\frac{\pi}{२} - थ = \text{कोज्या}^{-1} य$$

$$\therefore \text{ ज्या}^{-1} + \text{कोज्या}^{-1} य = थ + \left(\frac{\pi}{२} - थ\right)$$

$$= \frac{\pi}{२}$$

उदाहरण ४—सिद्ध करो कि

$$\text{स्प}^{-1} \frac{१}{२} + \text{स्प}^{-1} \frac{१}{३} = \frac{१}{४}\pi$$

मानलो $\text{स्प}^{-1} \frac{१}{२} = त$ और $\text{स्प}^{-1} \frac{१}{३} = थ$

अतः स्प $त = \frac{१}{२}$ और स्प $थ = \frac{१}{३}$

$$\text{अब स्प } (त + थ) = \frac{\text{स्प } त + \text{स्प } थ}{१ - \text{स्प } त \text{ स्प } थ}$$

$$= \frac{\frac{१}{२} + \frac{१}{३}}{१ - \frac{१}{२} \times \frac{१}{३}} = \frac{\frac{५}{६}}{\frac{५}{६}} = १$$

$$= \text{स्प } \frac{\pi}{४}$$

$$त + थ = \frac{\pi}{४}$$

$$\text{अर्थात् स्प}^{-1} \frac{१}{२} + \text{स्प}^{-1} \frac{१}{३} = \frac{१}{४}\pi$$

उदाहरण ५—सिद्ध करो कि

$$ज्या^{-1}\frac{३}{५} + ज्या^{-1}\frac{८}{१७} = ज्या^{-1}\frac{७७}{८५}$$

मानलो कि $ज्या^{-1}\frac{३}{५} = त$, $ज्या^{-1}\frac{८}{१७} = थ$, $ज्या^{-1}\frac{७७}{८५} = द$

$$\therefore ज्या\ त = \frac{३}{५},\ ज्या\ थ = \frac{८}{१७},\ ज्या\ द = \frac{७७}{८५}$$

जब ज्या $त = \frac{३}{५}$, तो कोज्या $त = \sqrt{१ - ज्या^२ त} = \sqrt{१ - (\frac{३}{५})^२}$

$$= \frac{४}{५}$$

और जब ज्या $थ = \frac{८}{१७}$, तो कोज्या $थ = \sqrt{१ - ज्या^२ थ} = \frac{१५}{१७}$

सिद्ध करना है कि

$$ज्या^{-1}\frac{३}{५} + ज्या^{-1}\frac{८}{१७} = ज्या^{-1}\frac{७७}{८५}$$

$$अर्थात्\ त + थ = द$$

$$या\ ज्या\ (त + थ) = ज्या\ द$$

$$या\ ज्या\ त\ कोज्या\ थ + ज्या\ थ\ कोज्या\ त = ज्या\ द$$

$$\frac{३}{५}\cdot\frac{१५}{१७} + \frac{४}{५}\cdot\frac{८}{१७} = ज्या\ द$$

$$\frac{७७}{८५} = ज्या\ द$$

= दिया हुआ है।

अतएव सिद्ध हो गया

उदाहरण ६—सिद्ध करो कि

$$कोज्या\ स्प^{-1}\ ज्या\ कोस्प^{-1}\ य = \sqrt{\frac{य^२ + १}{य^२ + २}}$$

(उत्तर प्रदेश १९४७)

$$\text{मान लो कोस्प}^{-१}\,\text{य} = \text{क, अतः कोस्प क} = \text{य}$$

$$\therefore \text{ज्या कोस्प}^{-१}\,\text{य} = \text{ज्या क} = \frac{१}{\text{व्युज्या क}} = \frac{१}{\sqrt{\text{य}^२ + १}}$$

$$\text{मानलो स्प}^{-१}\frac{१}{\sqrt{\text{य}^२ + १}} = \text{ख, स्प ख} = \frac{१}{\sqrt{\text{य}^२ + १}}$$

$$\therefore \text{कोज्या}\left[\text{स्प}^{-१}\left\{\text{ज्या}\left(\text{कोस्प}^{-१}\,\text{य}\right)\right\}\right]$$

$$= \text{कोज्या ख} = \frac{१}{\text{व्यको ख}} = \frac{१}{\sqrt{१ + \text{स्प}^२\,\text{ख}}}$$

$$= \sqrt{१ + \frac{१}{\text{य}^२ + १}} = \sqrt{\frac{\text{य}^२ + १}{\text{य}^२ + २}}$$

उदाहरण ७—सिद्ध करो कि

$$\text{स्प}^{-१}\,\text{क} + \text{स्प}^{-१}\,\text{ख} = \text{स्प}^{-१}\frac{\text{क} + \text{ख}}{१ - \text{क}\,.\,\text{ख}}$$

$$\text{मानलो कि स्प}^{-१}\,\text{क} = \text{य अतः क} = \text{स्प य}$$

$$\text{स्प}^{-१}\,\text{ख} = \text{र अतः ख} = \text{स्प र}$$

$$\therefore \text{स्प}\,(\text{य} + \text{र}) = \frac{\text{स्प य} + \text{स्प र}}{१ - \text{स्प य स्प र}}$$

$$= \frac{\text{क} + \text{ख}}{१ - \text{क ख}}$$

$$\therefore \text{य} + \text{र} = \text{स्प}^{-१}\frac{\text{क} + \text{ख}}{१ - \text{क ख}}$$

$$\text{अर्थात्}\quad \text{स्प}^{-१}\,\text{क} + \text{स्प}^{-१}\,\text{ख} = \text{स्प}^{-१}\frac{\text{क} + \text{ख}}{१ - \text{क ख}}$$

उदाहरण ८—सिद्ध करो कि

$$४ \text{ स्प}^{-१} \frac{१}{५} - \text{स्प}^{-१} \frac{१}{७०} + \text{स्प}^{-१} \frac{१}{९९} = \frac{\pi}{४}$$

मानलो कि $\text{स्प}^{-१} \frac{१}{५} = \text{य}$ अतः $\text{स्प य} = \frac{१}{५}$

$$\therefore \text{ स्प } २ \text{ य} = \frac{२ \text{ स्प य}}{१ - \text{स्प}^२ \text{ य}} = \frac{\frac{२}{५}}{१ - \frac{१}{२५}} = \frac{५}{१२}$$

$$\therefore \text{ स्प } ४ \text{ य} = \frac{२ \text{ स्प } २ \text{ य}}{१ - \text{स्प}^२ \text{ २य}} = \frac{\frac{१०}{१२}}{१ - \frac{२५}{१४४}} = \frac{१२०}{११९}$$

मानलो कि $\text{स्प}^{-१} \frac{१}{७०} = \text{र}$, $\therefore \text{ स्प र} = \frac{१}{७०}$

मान लो कि $\text{स्प}^{-१} \frac{१}{९९} = \text{ल}$, $\therefore \text{ स्प ल} = \frac{१}{९९}$

$$\text{अतः स्प } (\text{र} - \text{ल}) = \frac{\text{स्प र} - \text{स्प ल}}{१ + \text{स्प र स्प ल}}$$

$$= \frac{\frac{१}{७०} - \frac{१}{९९}}{१ + \frac{१}{७०} \cdot \frac{१}{९९}} = \frac{२९}{६९३१} = \frac{१}{२३९}$$

$$\text{र} - \text{ल} = \text{स्प}^{-१} \frac{१}{२३९}$$

सिद्ध करना है कि

$$४ \text{ स्प}^{-१} \frac{१}{५} - \text{स्प}^{-१} \frac{१}{७०} + \text{स्प}^{-१} \frac{१}{९९} = \frac{\pi}{४}$$

अर्थात् $४ \text{स्प}^{-1}\frac{१}{५} - \left(\text{स्प}^{-1}\frac{१}{७०} - \text{स्प}^{-1}\frac{१}{९९}\right) = \frac{\pi}{४}$

अर्थात् $४ \text{स्प}^{-1}\frac{१}{५} - \text{स्प}^{-1}\frac{१}{२३९} = \frac{\pi}{४}$

अर्थात् $४ \text{स्प}^{-1}\frac{१}{५} = \frac{\pi}{४} + \text{स्प}^{-1}\frac{१}{२३९}$

अर्थात् $\text{स्प}\left(४ \text{स्प}^{-1}\frac{१}{५}\right) = \text{स्प}\left(\frac{\pi}{४} + \text{स्प}^{-1}\frac{१}{२३९}\right)$

$$\frac{१२०}{११९} = \frac{\text{स्प}\frac{\pi}{४} + \text{स्प}\left(\text{स्प}^{-1}\frac{१}{२३९}\right)}{१ - \text{स्प}\frac{\pi}{४}\text{स्प}\left(\text{स्प}^{-1}\frac{१}{२३९}\right)}$$

$$= \frac{१ + \frac{१}{२३९}}{१ - १.\frac{१}{२३९}}$$

$$= \frac{२३९ + १}{२३९ - १} = \frac{२४०}{२३८}$$

$$= \frac{१२०}{११९}$$

अतः सिद्ध हो गया

उदाहरण ६—निम्न समीकरणों को हल करो:—

$$\text{ज्या}^{-1}\text{य} + \text{ज्या}^{-1}\text{र} = \frac{२}{३}$$

$$\text{कोज्या}^{-1}\text{य} - \text{कोज्या}^{-1}\text{र} = \frac{१}{३}\pi$$

(उत्तर प्रदेश १९४९ प्रथम परीक्षा)

चूँकि $ज्या^{-1} य + कोज्या^{-1} य = \frac{1}{2}\pi$

(उदाहरण ३ से)

$$ज्या^{-1} य = \frac{1}{2}\pi - कोज्या^{-1} य \quad \cdots\cdots (1)$$

$$ज्या^{-1} य + ज्या^{-1} र = \frac{2}{3}\pi$$

अतः (१) से

$$\frac{1}{2}\pi - कोज्या^{-1} य + \frac{1}{2}\pi - कोज्या^{-1} र = \frac{2}{3}\pi$$

$$कोज्या^{-1} य + कोज्या^{-1} र = \frac{1}{3}\pi \qquad (2)$$

$$कोज्या^{-1} य - कोज्या^{-1} र = \frac{1}{3}\pi \qquad (3)$$

(२) और (३) को जोड़कर

$$कोज्या^{-1} य = \frac{1}{3}\pi$$

$$य = कोज्या \frac{1}{3}\pi = \frac{1}{2}$$

(२) से (३) घटाकर

$$कोज्या^{-1} र = 0$$

$$र = कोज्या \; 0 = 1$$

$$\therefore \; य = \frac{1}{2}, र = 1$$

अभ्यास ३२

सिद्ध करो कि—

(१) $\text{ज्या}^{-१}\frac{१}{२} = \text{कोज्या}^{-१}\frac{\sqrt{३}}{२} = \text{स्प}^{-१}\frac{१}{\sqrt{३}}$

(२) $२\,\text{ज्या}^{-१}\text{य} = \text{ज्या}^{-१}\left(२\,\text{य}\sqrt{१-\text{य}^{२}}\right)$

(३) $२\,\text{स्प}^{-१}\text{य} = \text{स्प}^{-१}\frac{२\,\text{य}}{१-\text{य}^{२}}$

(४) $\text{स्प}^{-१}\text{य} - \text{स्प}^{-१}\text{र} = \text{स्प}^{-१}\frac{\text{य}-\text{र}}{१+\text{य}\,\text{र}}$

(५) $\text{स्प}^{-१}\text{य} + \text{स्प}^{-१}\text{र} + \text{स्प}^{-१}\text{ल}$

$$= \text{स्प}^{-१}\frac{\text{य}+\text{र}+\text{ल}-\text{य}\,\text{र}\,\text{ल}}{१-\text{र}\,\text{ल}-\text{ल}\,\text{य}-\text{य}\,\text{र}}$$

(६) $\text{स्प}^{-१}\text{य} + \text{कोस्प}^{-१}\text{य} = \frac{\pi}{२}$

(७) $\text{ज्या}^{-१}\frac{\text{य}}{\sqrt{१+\text{य}^{२}}} + \text{ज्या}^{-१}\frac{१}{\sqrt{१+\text{य}^{२}}} = \frac{\pi}{२}$

(८) $३\,\text{ज्या}^{-१}\text{य} = \text{ज्या}^{-१}(३\,\text{य}-४\,\text{य}^{३})$

(९) $\text{स्प}^{-१}\frac{३}{४} + \text{ज्या}^{-१}\frac{४}{५} = \frac{\pi}{२}$

(१०) $\text{ज्या}^{-१}\frac{१}{२} + \text{ज्या}^{-१}\frac{\sqrt{३}}{२} = \frac{\pi}{२}$

(११) $\text{स्प}^{-१}\text{य} + \text{स्प}^{-१}\frac{२\,\text{य}}{१-\text{य}^{२}} = \text{स्प}^{-१}\frac{३\,\text{य}-\text{य}^{३}}{१-३\,\text{य}^{२}}$

(१२) $\text{स्प}^{-१}\frac{१}{२} - \text{स्प}^{-१}\frac{१}{४} - \text{स्प}^{-१}\frac{२}{९} = ०$

(१३) $कोज्या^{-1} \frac{४}{५} = ज्या^{-1} \frac{५}{१३} + ज्या^{-1} \frac{१६}{६५}$

(कलकत्ता १९४१)

(१४) $स्प^{-1} \frac{१}{४} + स्प^{-1} \frac{२}{९} = \frac{१}{२} कोज्या^{-1} \frac{३}{५}$

(उत्तर प्रदेश १९४७)

(१५) $ज्या^{-1} \frac{३}{५} + कोस्प^{-1} \frac{५}{३} = कोस्प^{-1} \frac{११}{२७}$

(१६) $स्प^{-1} \frac{१}{२} + व्युज्या^{-1} \sqrt{१०} = ४$

(१७) $ज्या^{-1} \frac{३}{५} + कोस्प^{-1} \frac{५}{३} - ज्या^{-1} \frac{८}{५\sqrt{१७}} = \frac{\pi}{४}$

(१८) $स्प^{-1} \frac{१}{७} + २\ स्प^{-1} \frac{१}{३} = \frac{\pi}{४}$ (बनारस १९४१)

(१९) $स्प^{-1} \frac{१}{२} + स्प^{-1} \frac{१}{५} + स्प^{-1} \frac{१}{८} = \frac{\pi}{४}$

(२०) $स्प^{-1} १ + स्प^{-1} २ + स्प^{-1} ३ = \pi$

(२१) $स्प^{-1} \frac{१}{३} - स्प^{-1} \frac{१}{४} - स्प^{-1} \frac{१}{१३} = ०$

(२२) $२\ ज्या^{-1} \frac{५}{१३} - स्प^{-1} \frac{१२०}{११९} = ०$

(२३) $४\ स्प^{-1} \frac{१}{५} - स्प^{-1} \frac{१}{२३९} = \frac{\pi}{४}$

(२४) $स्प^{-1} \frac{१}{३} + स्प^{-1} \frac{१}{४} + स्प^{-1} \frac{१}{७} + स्प^{-1} \frac{१}{१३} = \frac{\pi}{४}$

(२५) $स्प^{-1} \frac{क - ख}{१ + क ख} + स्प^{-1} \frac{ख - ग}{१ + ख ग} = स्प^{-1} क - स्प^{-1} ग$

(२६) $स्प^{-1} \frac{क - ख}{१ + क ख} + स्प^{-1} \frac{ख - ग}{१ + ख ग} + स्प^{-1} \frac{ग - क}{१ + ग क}$
$= ०$

(२७) $ज्या^{-1}\ कोज्या\ स्प^{-1}\ य = कोस्प^{-1}\ य$

(२८) $कोज्या^{-1}\ य = २\ ज्या^{-1} \sqrt{\frac{१ - य}{२}} = २\ कोज्या^{-1} \sqrt{\frac{१ + य}{२}}$

(२९) $स्प^{-1} \frac{१६}{६३} + २\ स्प^{-1} \frac{१}{५} = स्प^{-1} \frac{३}{४}$

(३०) $२\ स्प^{-1} \frac{१}{५} + स्प^{-1} \frac{१}{३} = स्प^{-1} \frac{२७}{३१}$

(३१) $ज्या^{-1} \sqrt{\frac{ग - ख}{क - ख}} = कोज्या^{-1} \sqrt{\frac{क - ग}{क - ख}}$
$= स्प^{-1} \sqrt{\frac{ग - ख}{क - ग}}$

(३२) $कोस्प^{-1} \frac{१ + य^{२} र^{२}}{य^{२} - र^{२}} + कोस्प^{-1} \frac{१ + र^{२} ल^{२}}{र^{२} - ल^{२}}$
$+ कोस्प^{-1} \frac{१ + ल^{२} य^{२}}{ल^{२} - य^{२}} = ०$

(३३) $कोज्या \left(२\ स्प^{-1} \frac{१}{७} \right) = ज्या \left(४\ स्प^{-1} \frac{१}{३} \right)$

(३४) $कोस्प^{-1} \left(\frac{१ - य\ ज्या\ क}{य\ कोज्या\ क} \right) - कोस्प^{-1} \left(\frac{कोज्या\ क}{य - ज्या\ क} \right) = क$

(३५) $स्प^{-1} (य + १) - स्प^{-1} (य - १) = स्प^{-1} (२य^{-2})$

(३६) $स्प^{-1} \frac{\sqrt{३}+\sqrt{२}}{\sqrt{३}-\sqrt{२}} - स्प^{-1} \sqrt{\frac{३}{२}} = \frac{३}{४}\pi$

(३७) $कोस्प^{-1}\ ३ + व्युज्या^{-1}\ \sqrt{५} = \frac{\pi}{४}$

(३८) $स्प^{-1}(य-१) - २\ स्प^{-1}\ य + स्प^{-1}(य+१)$

$$+ कोस्प^{-1} \frac{य^४+य^२+२}{२\ य} = ०$$

(३९) $२\ कोस्प^{-1}\left\{ कोस्प\ \frac{क}{२}\ कोस्प\left(४५^\circ - \frac{ख}{२}\right)\right\}$

$$= कोस्प^{-1}(स्प\ ख\ व्युज्या\ क + कोस्प\ क\ व्युको\ ख)$$

(४०) यदि $कोज्या^{-1} \frac{य}{क} + कोज्या^{-1} \frac{र}{ख} = ल$ हो

सिद्ध करो कि

$$ख^२ य^२ - २\ य\ र\ क\ ख\ कोज्या\ ल + र^२ क^२$$

$$= क^२ ख^२ ज्या^२\ ल$$

(४१) यदि $कोज्या^{-1}य + कोज्या^{-1}र + कोज्या^{-1}ल = \pi$,

सिद्ध करो कि $य^२ + र^२ + ल^२ + २\ य\ र\ ल = १$

(४२) यदि $स्प^{-1}य + स्प^{-1}र + स्प^{-1}ल = \pi$, सिद्ध करो कि

$$य + र + ल = य\ र\ ल$$

(४३) यदि $स्प^{-1}य + स्प^{-1}र + स्प^{-1}ल = \frac{\pi}{२}$ सिद्ध करो कि

$$य\ र + र\ ल + ल\ य = १$$

(४४) यदि ज्या^{-1} य + ज्या^{-1} र + ज्या^{-1} ल = π, सिद्ध करो कि

$$\text{य}\sqrt{1-\text{य}^2}+\text{र}\sqrt{1-\text{र}^2}+\text{ल}\sqrt{1-\text{ल}^2}$$
$$=2\ \text{य र ल}$$

(४५) यदि क = $\text{कोस्प}^{-1}\sqrt{\text{कोज्या थ}}-\text{स्प}^{-1}\sqrt{\text{कोज्या थ}}$, सिद्ध करो कि

$$\text{ज्या क} = \text{स्प}^2\frac{\text{थ}}{2}$$

निम्न समीकरणों को हल करो

(४६) $\text{ज्या}^{-1}\ \text{य} = \frac{\pi}{4}$ (४७) $2\ \text{कोज्या}^{-1}\sqrt{\frac{1+\text{य}}{2}}=\frac{\pi}{3}$

(४८) $\text{ज्या}^{-1}\frac{3}{5}+\text{ज्या}^{-1}\frac{4}{5}=\text{ज्या}^{-1}\ \text{य}$

(४९) $2\ \text{स्प}^{-1}\ \text{य}+\text{स्प}^{-1}\frac{1}{7}=\text{स्प}^{-1}\ 1$

(५०) $\text{ज्या}^{-1}\ \text{य}+\text{ज्या}^{-1}\frac{1}{2}=\text{ज्या}^{-1}\frac{3}{4}$

(५१) $\text{स्प}^{-1}(\text{य}+1)+\text{स्प}^{-1}(\text{य}-1)=\text{कोस्प}^{-1}\ 3\frac{7}{8}$

(५२) $\text{स्प}^{-1}\ 2\text{य}+\text{स्प}^{-1}\ 3\text{य}=\frac{\pi}{4}$. (उत्तर प्रदेश १९४९)

(५३) $\text{ज्या}^{-1}\frac{2\text{क}}{1+\text{क}^2}+\text{ज्या}^{-1}\frac{2\text{ख}}{1+\text{ख}^2}=2\ \text{स्प}^{-1}\ \text{य}$

(५४) $\text{ज्या}(\text{स्प}^{-1}\ 2)=\text{स्प}(\text{कोज्या}^{-1}\sqrt{\text{य}})$

(५५) $\text{स्प}^{-1}\frac{\text{य}-1}{\text{य}+2}+\text{स्प}^{-1}\frac{\text{य}+1}{\text{य}+2}=\frac{\pi}{4}$

(५६) $\text{स्प}^{-१}\dfrac{\text{य}+१}{\text{य}-१} + \text{स्प}^{-१}\dfrac{\text{य}-१}{\text{य}} = \text{स्प}^{-१}(-७)$

(५७) $\text{ज्या}^{-१}\,\text{य} + \text{ज्या}^{-१}\,२\,\text{य} = \dfrac{\pi}{३}$

(५८) $\text{कोज्या}^{-१}\dfrac{१-\text{य}^२}{१+\text{य}^२} + \text{स्प}^{-१}\dfrac{२\,\text{य}}{१-\text{य}^२} = \dfrac{४}{३}\pi$

(५९) $\text{स्प}^{-१}\dfrac{\text{क}}{\text{य}} + \text{स्प}^{-१}\dfrac{\text{ख}}{\text{य}} + \text{स्प}^{-१}\dfrac{\text{ग}}{\text{य}} + \text{स्प}^{-१}\dfrac{\text{घ}}{\text{य}} = \dfrac{\pi}{४}$

(६०) $\text{कोज्या}^{-१}\dfrac{१-\text{क}^२}{१+\text{क}^२} - \text{कोज्या}^{-१}\dfrac{१-\text{ख}^२}{१+\text{ख}^२} = २\,\text{स्प}^{-१}\,\text{य}$

(६१) $\text{ज्या}^{-१}\dfrac{४\,\text{य}\,(\text{य}^२-१)}{(\text{य}^२+१)^२} - \text{कोज्या}^{-१}\dfrac{\text{य}^२-१}{\text{य}^२+१} = \dfrac{\pi}{२}$

(६२) $\text{स्प}^{-१}\,\text{य} + \text{स्प}^{-१}\,\text{र} = \dfrac{५}{६}\pi$

$$\text{कोस्प}^{-१}\,\text{य} - \text{कोस्प}^{-१}\,\text{र} + \dfrac{\pi}{१२} = ०$$

(६३) $\text{ज्या}^{-१}\,\text{य} + \text{ज्या}^{-१}\,\text{र} = \dfrac{१}{२}\pi$

$$\text{कोज्या}^{-१}\,\text{य} - \text{कोज्या}^{-१}\,\text{र} = ०$$

(६४) यदि $\text{ज्या}^{-१}\,\text{म} + \text{ज्या}^{-१}\,\text{न} = \dfrac{\pi}{२}$, सिद्ध करो कि

$$\text{म}\sqrt{१-\text{न}^२} + \text{न}\sqrt{१-\text{म}^२} = १$$

---

(१६६) लुप्तीकरण—(Elimination)

पारस्परिक सम्बन्ध से अथवा तीन युगपत् (simultaneous) समीकरणों में आई हुई एक अथवा दो अज्ञात राशियों का लोप करने

की क्रिया **लुप्तीकरण** (elimination) कहलाती है। लुप्त करने के पश्चात आये हुये मान को **अपनीत** (eliminant) कहते हैं।

(१७०) उदाहरण १—थ को लुप्त करोः—

$$य = क \text{ ज्या } थ$$

$$र = ख \text{ कोज्या } थ$$

$$\frac{य}{क} = \text{ज्या } थ \cdots\cdots (१)$$

$$\frac{र}{ख} = \text{कोज्या } थ \cdots\cdots (२)$$

(१) और (२) के वर्गों को जोड़ कर

$$\frac{य^२}{क^२} + \frac{र^२}{ख^२} = \text{ज्या}^२ थ + \text{कोज्या}^२ थ$$

$$= १$$

उदाहरण २— थ को लुप्त करो

$$क = \text{ज्या } थ \text{ कोज्या}^२ थ$$

$$ख = \text{कोज्या } थ \text{ ज्या}^२ थ$$

$$\frac{क}{ख} = \frac{\text{ज्या } थ \text{ कोज्या}^२ थ}{\text{कोज्या } थ \text{ ज्या}^२ थ} = \text{कोस्प } थ$$

$$\therefore \text{कोज्या } थ = \frac{क}{\sqrt{क^२ + ख^२}}, \quad \text{ज्या } थ = \frac{ख}{\sqrt{क^२ + ख^२}}$$

अतएव $$क = \text{ज्या } थ \text{ कोज्या}^२ थ$$

$$= \frac{ख}{\sqrt{क^२ + ख^२}} \cdot \frac{क^२}{क^२ + ख^२}$$

$$क ख = (क^२ + ख^२)^{\frac{३}{२}}$$

उदाहरण ३—थ का लोप करो—

$$\text{क स्प}^2\,\text{थ} + \text{ख स्प थ} + \text{ग} = 0$$

$$\text{क}'\ \text{कोस्प}^2\,\text{थ} + \text{ख}'\ \text{कोस्प थ} + \text{ग}' = 0$$

(उत्तर प्रदेश १९३८)

चूँकि $\text{क स्प}^2\,\text{थ} + \text{ख स्प थ} + \text{ग} = 0$

$$\therefore\ \text{स्प थ} = \frac{-\text{ख} \pm \sqrt{\text{ख}^2 - 4\,\text{क ग}}}{2\,\text{क}}$$

चूँकि $\text{क}'\ \text{कोस्प}^2\,\text{थ} + \text{ख}'\ \text{कोस्प थ} + \text{ग}' = 0$

$$\therefore\ \text{कोस्प थ} = \frac{-\text{ख}' \pm \sqrt{\text{ख}'^2 - 4\,\text{क}'\,\text{ग}'}}{2\,\text{क}'}$$

अतः $\text{स्प थ कोस्प थ} = 1$

$$= \left(\frac{-\text{ख} \pm \sqrt{\text{ख}^2 - 4\,\text{क ग}}}{2\,\text{क}}\right)\left(\frac{-\text{ख}' \pm \sqrt{\text{ख}'^2 - 4\,\text{क}'\,\text{ग}'}}{2\,\text{क}'}\right)$$

$$\therefore\ 4\,\text{क}\,\text{क}' = \left(-\text{ख} \pm \sqrt{\text{ख}^2 - 4\,\text{क ग}}\right)\left(-\text{ख}' \pm \sqrt{\text{ख}'^2 - 4\,\text{क}'\,\text{ग}'}\right)$$

उदाहरण ४—निम्न समीकरणों से थ का लोप करो।

$$\frac{\text{य}}{\text{क}}\ \text{कोज्या थ} - \frac{\text{र}}{\text{ख}}\ \text{ज्या थ} = \text{कोज्या २ थ} \quad \cdots\cdots (1)$$

$$\frac{\text{य}}{\text{क}}\ \text{ज्या थ} + \frac{\text{र}}{\text{ख}}\ \text{कोज्या थ} = \text{२ ज्या २ थ} \quad \cdots\cdots (2)$$

(१) को ज्या थ से (२) को कोज्या थ से गुणा करके और गुणनफलों को एक दूसरे से घटाकर

$$\frac{\text{र}}{\text{ख}} = \text{२ ज्या २ थ कोज्या थ} - \text{कोज्या २ थ ज्या थ}$$

$= \text{ज्या } २ \text{ थ कोज्या थ} + \text{ज्या } (२ \text{ थ} - \text{थ})$

$= २ \text{ ज्या थ कोज्या}^२ \text{ थ} + \text{ज्या थ} \cdots\cdots\cdots (३)$

(१) को कोज्या थ (२) को ज्या थ से गुणा करके और गुणनफलों को जोड़कर

$$\frac{\text{य}}{\text{क}} = \text{कोज्या थ कोज्या } २ \text{ थ} + २ \text{ ज्या थ ज्या } २ \text{ थ}$$

$= \text{कोज्या थ} + \text{ज्या थ ज्या } २ \text{ थ}$

$= \text{कोज्या थ} + २ \text{ ज्या}^२ \text{ थ कोज्या थ} \cdots\cdots\cdots (४)$

(३) और (४) को जोड़कर

$$\frac{\text{य}}{\text{क}} + \frac{\text{र}}{\text{ख}} = (\text{ज्या थ} + \text{कोज्या थ})\ (१ + २ \text{ ज्या थ कोज्या थ})$$

$= (\text{ज्या थ} + \text{कोज्या थ})\ (\text{ज्या थ} + \text{कोज्या थ})^२$

$= (\text{ज्या थ} + \text{कोज्या थ})^3$

$$\text{अतः ज्या थ} + \text{कोज्या थ} = \left(\frac{\text{य}}{\text{क}} + \frac{\text{र}}{\text{ख}}\right)^{\frac{1}{3}} \cdots\cdots (५)$$

(३) को (४) से घटाकर उसी प्रकार

$$\left(\frac{\text{य}}{\text{क}} - \frac{\text{र}}{\text{ख}}\right) = (\text{कोज्या थ} - \text{ज्या थ})^3$$

$$(\text{कोज्या थ} - \text{ज्या थ}) = \left(\frac{\text{य}}{\text{क}} - \frac{\text{र}}{\text{ख}}\right)^{\frac{1}{3}} \cdots\cdots (६)$$

(५) और (६) के वर्गों को जोड़कर

$$\left(\frac{\text{य}}{\text{क}} + \frac{\text{र}}{\text{ख}}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{\text{य}}{\text{क}} - \frac{\text{र}}{\text{ख}}\right)^{\frac{2}{3}} = २$$

अभ्यास ३३

निम्न समीकरणों से थ का लोप करो :—

(१) य = क कोज्या थ , र = क ज्या थ

(२) य = क व्युको थ , र = ख स्प थ

(३) य = क $थ^{2}$, र = २ क थ

(४) य = क व्युज्या थ , र = ख कोस्प थ

(५) य = $ज्या^{3}$ थ , र = $कोज्या^{3}$ थ

(६) कोस्प थ + कोज्या थ = ४ य
कोस्प थ − कोज्या थ = ४ र

(७) स्प थ + ज्या थ = य
स्प थ − ज्या थ = र

(८) कोस्प थ + स्प थ = य
व्युको थ − कोज्या थ = र

(९) य कोज्या थ + र ज्या थ = १
य ज्या थ − र कोज्या थ = १

(१०) य कोज्या थ + र ज्या थ = क
य′ कोज्या थ + र′ ज्या थ = क′

(११) य = व्युज्या थ − ज्या थ
र = व्युको थ − कोज्या थ

(१२) य = २ क ज्या थ (उत्तर प्रदेश १९४८)
र = ३ कोज्या (थ − ३०°)

(१३) य = ज्या (थ + क)
र = कोज्या (थ − ख) (उत्तर प्रदेश १९४९)

(१४) $\frac{य}{क}$ = कोज्या (थ + म)

$\frac{र}{ख}$ = कोज्या (थ − म′)

(१५) $\text{य ज्या थ} + \text{र कोज्या थ} = \text{२ क ज्या २ थ}$

$\text{य कोज्या थ} - \text{र ज्या थ} = \text{क कोज्या २ थ}$

(१६) $\text{य} = \text{क कोज्या थ}$

$\text{र} = \text{क स्प} \dfrac{\text{थ}}{\text{२}}$　　(उत्तर प्रदेश १९४८ पूरक)

(१७) $(\text{य} - \text{क ज्या थ})^{2} + (\text{र} - \text{क कोज्या थ})^{2} = \text{क}^{2}$

$(\text{य ज्या थ} - \text{र कोज्या थ}) = \text{क}$

(१८) $\text{य ज्या थ} - \text{र कोज्या थ} = \sqrt{\text{य}^{2} + \text{र}^{2}}$

$$\frac{\text{कोज्या}^{2}\,\text{थ}}{\text{क}^{2}} + \frac{\text{ज्या}^{2}\,\text{थ}}{\text{ख}^{2}} = \frac{१}{\text{य}^{2} + \text{र}^{2}}$$

(१९) $\dfrac{\text{क य}}{\text{कोज्या थ}} - \dfrac{\text{ख र}}{\text{ज्या थ}} = \text{क}^{2} - \text{ख}^{2}$

$$\frac{\text{क य ज्या थ}}{\text{कोज्या}^{2}\,\text{थ}} + \frac{\text{ख र कोज्या थ}}{\text{ज्या}^{2}\,\text{थ}} = ०$$

(१०) $\dfrac{\text{य}}{\text{क}} + १ = \text{२ कोज्या थ} - \text{कोज्या २ थ}$

$\dfrac{\text{र}}{\text{क}} = \text{२ ज्या थ} - \text{ज्या २ थ}$

निम्न समीकरणों से थ एवं फ का लोप करो।

(२१) $\text{ज्या थ} + \text{ज्या फ} = \text{य}$

$\text{कोज्या थ} + \text{कोज्या फ} = \text{र}$

$\text{थ} - \text{फ} = \text{क}$

(१२) $\dfrac{\text{य}}{\text{क}}\,\text{कोज्या थ} + \dfrac{\text{र}}{\text{ख}}\,\text{ज्या थ} = १$

$\dfrac{\text{य}}{\text{क}}\,\text{कोज्या फ} + \dfrac{\text{र}}{\text{ख}}\,\text{ज्या फ} = १$

$$\frac{\text{कोज्या थ कोज्या फ}}{\text{क}^{2}} + \frac{\text{ज्या थ ज्या फ}}{\text{ख}^{2}} = ०$$

(२३) य = क ज्या थ कोज्या फ

र = क ज्या थ ज्या फ

ल = क कोज्या थ

(२४) य = स्प थ + स्प फ

र = कोस्प थ + कोस्प फ

क = थ + फ

(२५) क ज्या^{2} थ + ख कोज्या थ = १

क कोज्या^{2} फ + ख ज्या^{2} फ = १

क स्प थ = ख स्प फ

(२६) ज्या थ + ज्या फ = य

कोज्या थ + कोज्या फ = र

स्प थ + स्प फ = ल

(२७) य ज्या^{2} थ + र कोज्या^{2} थ = क

र ज्या^{2} फ + य कोज्या^{2} फ = क'

य स्प थ = र स्प फ

———

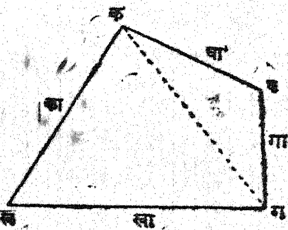
अध्याय १७

चतुर्भुज एवं समबहुभुजों के प्रगुण
तथा
कुछ त्रिकोणमितीय निष्पत्तियों की सीमायें

Properties of Quadrilaterals and Regular polygons and Limits of some Trigonometrical Ratios.

(१७१) किसी चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात करना—

क ख ग घ एक चतुर्भुज है जिसकी भुजायें क्रमशः का, खा, गा, घा हैं।



मानलो कोण ख + घ = २ थ, तथा चिन्ह △ से चतुर्भुज का क्षेत्रफल एवं अ से चतुर्भुज की अर्द्ध परिमिति से बोध होता है।

चूँकि का^{२} + खा^{२} − २ का . खा कोज्या^{२} ख = क ग^२

= गा^{२} + घा^{२} − २ गा घा कोज्या घ

∴ का^{२} + खा^{२} − गा^{२} − घा^{२} = २ का . खा कोज्या ख − २ गा . घा कोज्या घ ....(१)

△ = त्रिभुज क ख ग + त्रिभुज क ग घ

= $\frac{१}{२}$ का . खा ज्या ख + $\frac{१}{२}$ गा . घा ज्या घ

$$४\triangle = \text{का} . \text{खा} . \text{ज्या ख} + \text{गा} . \text{घा} . \text{ज्या घ} \quad \cdots\cdots (२)$$

(१) और (२) के वर्गों को जोड़कर

$$(\text{का}^2 + \text{खा}^2 - \text{गा}^2 - \text{घा}^2)^2 + १६\triangle^2$$
$$= ४ \text{ का}^2 . \text{खा}^2 + ४ \text{ गा}^2 \text{ घा}^2$$
$$- ८ \text{ का} . \text{खा} . \text{गा} . \text{घा} (\text{कोज्या ख कोज्या घ} - \text{ज्या ख ज्या घ})$$
$$= ४ \text{ का}^2 . \text{खा}^2 + ४ \text{ गा}^2 . \text{घा}^2 - ८ \text{ का} . \text{खा} . \text{गा} . \text{घा} \text{ कोज्या} (\text{ख} + \text{घ})$$
$$= ४ \text{ का}^2 . \text{खा}^2 + ४ \text{ गा}^2 \text{ घा}^2 - ८ \text{ का} . \text{खा} . \text{गा} . \text{घा} \text{ कोज्या } २ \text{ थ}$$
$$= ४ (\text{का}^2 . \text{खा}^2 + \text{गा}^2 . \text{घा}^2) + ८ \text{ का} . \text{खा} . \text{गा} . \text{घा} - १६ \text{ का} . \text{खा} . \text{गा} . \text{घा कोज्या}^2 \text{ थ}$$
$$= ४ (\text{का} . \text{खा} + \text{गा} . \text{घा})^2 - १६ \text{ का} . \text{खा} . \text{गा} . \text{घा} . \text{कोज्या}^2 \text{ थ}$$

$$१६\triangle^2 = ४ (\text{का} . \text{खा} + \text{गा} . \text{घा})^2 - (\text{का}^2 + \text{खा}^2 - \text{गा}^2 - \text{घा}^2)^2 - १६ \text{ का} . \text{खा} . \text{गा} . \text{घा} . \text{कोज्या}^2 \text{ थ}$$
$$= (२ \text{ का} . \text{खा} + २ \text{ गा} . \text{घा} + \text{का}^2 + \text{खा}^2 - \text{गा}^2 - \text{घा}^2)$$
$$(२ \text{ का} . \text{ख} + २ \text{ गा} . \text{घा} - \text{का}^2 - \text{खा}^2 + \text{गा}^2 + \text{घा}^2)$$
$$- १६ \text{ का} . \text{खा} . \text{गा} . \text{घा} . \text{कोज्या}^2 \text{ थ}$$
$$= \{(\text{का} + \text{खा})^2 - (\text{गा} - \text{घा})^2\}$$
$$\{(\text{गा} + \text{घा})^2 - (\text{का} - \text{खा})^2\}$$
$$- १६ \text{ का} . \text{खा} . \text{गा} . \text{घा कोज्या}^2 \text{ थ}$$
$$= (\text{का} + \text{खा} + \text{गा} - \text{घा})(\text{का} + \text{खा} - \text{गा} + \text{घा})$$
$$(\text{का} - \text{खा} + \text{गा} + \text{घा})(- \text{का} + \text{खा} + \text{गा} + \text{घा})$$
$$- १६ \text{ का} . \text{खा} . \text{गा} . \text{घा कोज्या}^2 \text{ थ}$$
$$= (२ \text{ अ} - २ \text{ घा})(२ \text{ अ} - २ \text{ गा})(२ \text{ अ} - २ \text{ खा})$$
$$(२ \text{ अ} - २ \text{ का}) - १६ \text{ का खा गा घा कोज्या}^2 \text{ थ}$$

$= १६ (अ - का) (अ - खा) (अ - गा) (अ - घा) - १६ \text{ का खा गा घा कोज्या}^२ थ$

$$\triangle^२ = (अ - का) (अ - खा) (अ - गा) (अ - घा) - \text{का खा गा घा कोज्या}^२ थ \cdots\cdots\cdots (१)$$

टिप्पणी—इससे घा = ० रखकर, त्रिभुज का क्षेत्रफल इसकी भुजाओं के पदों में निकाला जा सकता है।

(१७२) चक्रीय-चतुर्भुज (cyclic quadrilateral) का क्षेत्रफल ज्ञात करना—

चूँकि चक्रीय-चतुर्भुज के आमने-सामने के कोणों का योग २ समकोण होता है

$$\therefore थ = \frac{ख + घ}{२} = \frac{१८०°}{२} = ९०°$$

$\therefore$ कोज्या थ = कोज्या ९०° = ०

उस अवस्था में

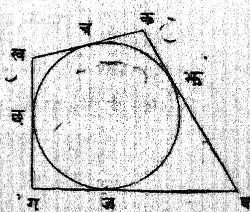
$$\triangle = \sqrt{(अ - का)(अ - खा)(अ - गा)(अ - घा)} \cdots (२)$$

(१७३) किसी वृत्त के परिगत-चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात करना—

चतुर्भुज कखगघ वृत्त को च, छ, ज, झ विन्दुओं पर स्पर्श करता है

कच = कझ, चख = खछ, छग = गछ

और जघ = घझ



$\therefore$ कच + चख + जग + जघ = कझ + घझ + खछ + गछ

कख + गघ = घक + खग

का + गा = खा + घा

$$= \frac{का + खा + गा + घा}{२} = अ$$

$\therefore$ अ–का = गा, अ–खा = घा, अ–गा = का, अ–खा = घा

$\therefore$ (अ–का) (अ–खा) (अ–गा) (अ–घा) = का . खा . गा . घा

अतः इस अवस्था में—

$\triangle^2$ = का . खा . गा . घा – का . खा . गा . घा कोज्या^{2} थ

= का . खा . गा . घा . ज्या^{2} थ

$\triangle = \sqrt{\text{का खा गा घा ज्या थ}}$ .... (३)

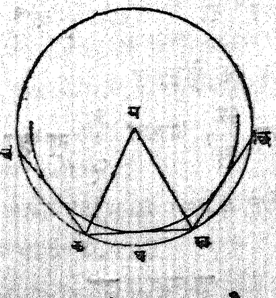
(१७४) किसी वृत्त के परिगत-चक्रीय चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात करना—

चक्रीय चतुर्भुज में थ = ९०°, $\therefore$ ज्या थ = १

$\therefore \triangle = \sqrt{\text{का खा गा घा}}$

(१७५) समबहुभुज क्षेत्रों (regular polygons) के क्षेत्रफल एवं उनके वहिर्वृत्त तथा अन्तःवृत्त की त्रिज्यायें ज्ञात करना—

मानलो स संख्या की भुजा के समबहुभुज क्षेत्रों के वहिर्वृत्त एवं अन्तःवृत्त की त्रिज्यायें क्रमशः त्रा एवं त्र हैं। म उनका केन्द्र है।



क ख (= का) बहुभुज की एक भुजा है

म, क और म, ख को मिलाओ।

$$\angle \text{क म घ} = \tfrac{1}{2} \angle \text{क म ख} = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{\text{स}} = \frac{\pi}{\text{स}}$$

$$\therefore \text{का} = 2 \text{ क घ} = 2 \text{ त्रा ज्या क म घ} = 2 \text{ त्रा ज्या } \frac{\pi}{\text{स}}$$

$$\therefore \text{त्रा} = \frac{\text{का}}{2 \text{ ज्या } \frac{\pi}{\text{स}}} = \frac{1}{2} \text{का व्युज्या} \frac{\pi}{\text{स}}$$

$$\text{तथा का} = 2 \text{ क घ} = 2 \text{ म घ स्प क म घ}$$

$$= 2 \text{ त्र स्प } \frac{\pi}{\text{स}}$$

$$\therefore \text{त्र} = \frac{\text{का}}{2 \text{ स्प } \frac{\pi}{\text{स}}} = \frac{1}{2} \text{ का कोस्प } \frac{\pi}{2}$$

$$\text{त्रिभुज म क ख} = \tfrac{1}{2} \text{ क ख . म घ अथवा}$$

$$\tfrac{1}{2} \text{ क म . ख म ज्या क म ख}$$

$$= \tfrac{1}{2} \text{ का त्र अथवा } \tfrac{1}{2} \text{ त्रा}^2 \text{ ज्या } \frac{2\pi}{\text{स}}$$

$$= \text{त्र}^2 \text{ स्प } \frac{\pi}{\text{स}} \text{ अथवा } \frac{1}{2} \text{त्रा}^2 \text{ ज्या } \frac{2\pi}{\text{स}}$$

अतः समबहुज क्षेत्र का क्षेत्रफल

$$= \text{स त्र}^2 \text{ स्प } \frac{\pi}{\text{स}} \text{ अथवा } \frac{1}{2} \text{ स त्रा}^2 \text{ ज्या } \frac{2\pi}{\text{स}}$$

अभ्यास ३४

(१) यदि क ख ग घ चक्रीय चतुर्भुजों के विकर्णों (diagonals) की लम्बाई य तथा र हो तो सिद्ध करो कि

$$य . र = का . गा + खा . घा$$

$$\frac{य}{र} = \frac{का . घा + खा . गा}{का . खा + गा . घा}$$

(२) समबहुभुज क्षेत्र क ख ग घ की क ख, ग घ भुजायें बढ़ाई जाने पर छ विन्दु पर मिलती हैं। सिद्ध करो कि उसके क्षेत्रफल की, त्रिभुज ख छ ग के क्षेत्रफल से निष्पत्ति $\sqrt{५}$ के बराबर होगी।

(३) सिद्ध करो कि किसी चक्रीय चतुर्भुज क ख ग घ के परिगत वृत्त की त्रिज्या

$$\frac{१}{४}\left\{\frac{(का.खा + गा.घा)\ (का.गा + खा.घा)\ (का.घा + खा.गा)}{(\ अ - का\ )\ (\ अ - खा\ )\ (\ अ - गा\ )\ (\ अ - घा)}\right\}^{\frac{१}{२}}$$

होती है।

(४) किसी वृत्त के परिगत एक चतुर्भुज है। सिद्ध करो कि उस वृत्त की त्रिज्या

$$\frac{२\triangle}{(का + खा + गा + घा)} \quad होगी।$$

(५) किसी वृत्त के परिगत क ख ग घ एक चक्रीय चतुर्भुज है। सिद्ध करो कि उस चतुर्भुज के परिवृत्त की त्रिज्या

$$\frac{२\sqrt{का . खा . गा . घा}}{का + खा + गा + घा} \quad होगी।$$

(६) यदि किसी चक्रीय चतुर्भुज क ख ग घ में,

$$का + खा = गा + घा,$$

सिद्ध करो कि चतुर्भुज का क्षेत्रफल गा . घा स्प$\frac{ख}{२}$ होगा।

(७) सिद्ध करो कि क ख ग घ चक्रीय चतुर्भुज में,

$$\text{स्प}\ \frac{\text{ख}}{२} = \sqrt{\frac{(\text{अ} - \text{का})(\text{अ} - \text{खा})}{(\text{अ} - \text{गा})(\text{अ} - \text{घा})}}$$

(८) सिद्ध करो कि कखगघ चक्रीय-चतुर्भुज में एक विकर्ण (diagonal) से विभाजित दूसरे विकर्ण के खण्डों का गुणनफल

$$\frac{\text{का . खा . गा . घा (का . गा + खा . घा)}}{(\text{का . खा + गा . घा})\ (\text{का . घा + खा . गा})}$$ होगा।

(९) सिद्ध करो कि स संख्या की भुजाओं के समबहुभुज क्षेत्र के अन्तःवृत्त एवं परिवृत्त की त्रिज्याओं का योग $\frac{१}{२}$ का कोस्प $\frac{\pi}{२\text{स}}$ होता है, जबकि का क्षेत्र की एक भुजा है।

(१०) किसी वृत्त के अन्तर्गत एवं परिगत स संख्या की भुजाओं के दो समबहुभुज क्षेत्र हैं, सिद्ध करो कि उनकी परिसीमाओं में $\frac{\pi}{\text{स}}$ व्युज्या $\frac{\pi}{\text{स}}$: १ : व्युको $\frac{\pi}{\text{स}}$ की निष्पत्ति होती है। यह भी सिद्ध करो कि बहुभुज के क्षेत्रफलों में कोज्या^{२} $\frac{\pi}{\text{स}}$: १ की निष्पत्ति होगी।

(११) यदि का, खा, गा, घा किसी चतुर्भुज की भुजाएँ हों और छ, ज विकर्ण हों तो सिद्ध करो कि दोनों विकर्णों के बीच का कोण

$$\text{कोज्या}^{-१}\left(\frac{\text{का}^२ + \text{गा}^२ - \text{खा}^२ - \text{घा}^२}{२\ \text{छ ज}}\right)$$ है।

(१२) क ख ग घ चतुर्भुज के ख और घ कोण समकोण हैं। सिद्ध करो कि

$$\text{खग} + \text{गघ} = (\text{कख} + \text{कघ})\ \text{स्प}\ \tfrac{१}{२}\ \text{खकघ}$$

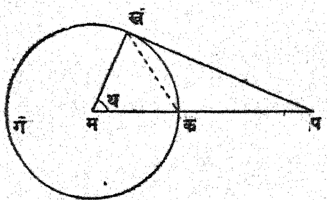
(१७६) यदि थ रेडियनों में न्यून कोण हो, तो सिद्ध करो कि

स्प थ > थ > ज्या थ

मानलो कि क ख ग एक वृत्त है जिसका केन्द्र म और त्रिज्या त्र है। यह भी मान लो कि ∠ क म ख = थ

ख विन्दु से ख प स्पर्श रेखा (tangent line) खींचो जो कि म क को बढ़ाने पर प पर काटे।

अब ख प = त्र स्प थ



चूँकि $\dfrac{\text{चाप क ख}}{\text{म ख}}$ = कोण क म ख के रेडियनों की संख्या

= थ

चाप क ख = त्र थ

अब △ म प ख > त्रिज्यखण्ड (sector) > △ म क ख

अर्थात् $\frac{1}{2}$ म ख . ख प > $\frac{1}{2}$ म ख . चाप क ख

> $\frac{1}{2}$ म क . म ख ज्या थ

अर्थात् $\frac{1}{2}$ त्र^2 स्प थ > $\frac{1}{2}$ त्र^2 थ > $\frac{1}{2}$ त्र^2 ज्या थ

अर्थात् स्प थ > थ > ज्या थ

———

(१७७) यदि थ अपरिमित रूप से घटाया जाय तो सिद्ध करो कि

$$\frac{\text{थ}}{\text{ज्या थ}} = १ = \frac{\text{थ}}{\text{स्प थ}}$$

ऊपर सिद्ध किया जा चुका है कि

$$\text{स्प थ} > \text{थ} > \text{ज्या थ} \quad \cdots\cdots \quad (१)$$

सभी को ज्या थ से विभाजित करने पर

$$\frac{१}{\text{कोज्या थ}} > \frac{\text{थ}}{\text{ज्या थ}} > १$$

जब थ अपरिमित रूप से घटाया जाय तो $\frac{१}{\text{कोज्या थ}}$ और व्युको थ

१ के निकट होते जाते हैं ; और $\frac{\text{थ}}{\text{ज्या थ}}$ जो सदा १ और व्युको

थ के बीच स्थित है, इस अवस्था में १ और उस राशि के बीच में होता है जिसमें और १ में अनिश्चित कम अन्तर है अर्थात् यह भी सर्वथा इकाई के समान होगा,

$$\text{अर्थात्}\quad \text{सीमा}_{\text{थ} \to ०} \left(\frac{\text{थ}}{\text{ज्या थ}}\right) = १$$

उसी प्रकार (१) को स्प थ से विभाजित करने पर

$$१ > \frac{\text{थ}}{\text{स्प थ}} > \text{कोज्या थ}$$

परन्तु सीमान्त (limit) अवस्था में, जब थ अपरिमित रूप में घटाया जाय, तो कोज्या थ = १

$\therefore \frac{\text{थ}}{\text{स्प थ}}$ जो सदा कोज्या थ और १ के बीच में रहता है, इस अवस्था में १ और उस राशि के बीच में होता है जिसमें और १ में

अनिश्चित कम अन्तर है, अर्थात् यह भी सर्वथा इकाई के समान होगा

अर्थात् $\underset{थ \to ०}{\text{सीमा}} \left(\frac{थ}{\text{स्प } थ}\right) = १$

प्रायः इसे इस प्रकार प्रकट करते हैं कि

'यदि थ अपरिमित रूप से घटाया जाय, तो ज्या थ = थ = स्प थ'

(१७८) उदाहरण १—सिद्ध करो कि ज्या $य'' =$ स्प $य''$ $= \frac{य}{२०६२६५}$ लगभग, जबकि $य''$ बहुत छोटा कोण है

ज्या $य''$ = स्प $य'' = य''$ का रेडियन में मान

$$= \frac{य\pi}{१८० \times ६० \times ६०} = \frac{य \times ३\cdot१४१६}{१८० \times ६० \times ६०}$$

$$= \frac{य}{१८० \times ६० \times ६० \times \cdot३१८३१} = \frac{य}{२०६२६५} \text{ लगभग}$$

उदाहरण २—सिद्ध करो कि ज्या क' लगभग $\frac{२९ क}{१०^५}$ है, जहाँ कि क' बहुत ही छोटा है।

$$\text{ज्या } क' = \text{ज्या} \frac{क}{६० \times ६०} \times \frac{\pi}{२} = \frac{क\pi}{१२० \times ६०}$$

$$= \frac{क . ३\cdot१४१६}{१०^२ \times १०८} = \frac{क \times १५\cdot४०८०}{१०^२ \times ५४०} = \frac{क \times १५\cdot४०८०}{१०^३ \times ५४}$$

$$= \frac{क \times ७७\cdot०१४०}{१०^४ \times २७} = \frac{क \times ७७०\cdot४}{१०^५ \times २७} = \frac{२९ क}{१०^५} \text{ लगभग।}$$

विविध अभ्यास ३५

(१) यदि ज्या य + ज्या^{२} य = १ तो ज्या य का मान बताओ और सिद्ध करो कि

कोज्या^{२} य + कोज्या^{४} य = १ (उत्तर प्रदेश १९२७)

(२) सिद्ध करो कि

$$\text{ज्या}^{न}\ थ\ \text{कोज्या}^{न+२}\ थ + \text{कोज्या}^{न}\ थ\ \text{ज्या}^{न+२}\ थ = \text{ज्या}^{न}\ थ\ \text{कोज्या}^{न}\ थ$$

(३) सिद्ध करो कि

$$६(\text{कोज्या}^{१०}\ थ + \text{ज्या}^{१०}\ थ) - १५\ (\text{कोज्या}^{८}\ थ + \text{ज्या}^{८}\ थ) + १०\ (\text{कोज्या}^{६}\ थ + \text{ज्या}^{६}\ थ) = १$$

(४) यदि कोज्या थ $= \dfrac{२\ य}{१ + क^{२}}$, ज्या फ $= \dfrac{य^{२} - १}{य^{२} + १}$,

सिद्ध करो कि ज्या थ कोज्या फ − कोज्या थ ज्या फ = ०

(५) सिद्ध करो कि $१ - \dfrac{\text{ज्या}^{२}\ त}{\text{ज्या}^{२}\ थ} = \text{कोज्या}^{२}\ त \left(१ - \dfrac{\text{स्प}^{२}\ त}{\text{स्प}^{२}\ थ}\right)$

(६) सिद्ध करो कि (ज्या थ + स्प थ) (कोज्या थ + कोस्प थ), ज्या थ कोज्या थ और (ज्या थ − स्प थ) (कोज्या थ − कोस्प थ) गुणोत्तर श्रेणी (G. P.) में हैं।

(७) यदि य $= \dfrac{१ - \text{ज्या}\ थ}{\text{कोज्या}\ थ}$, सिद्ध करो कि

$$\frac{१}{य} = \frac{१ + \text{ज्या}\ थ}{\text{कोज्या}\ थ}$$

(८) यदि क + ख = २२५°, तो सिद्ध करो कि

$$\frac{\text{कोस्प}\ क}{१ + \text{कोस्प}\ क} \cdot \frac{\text{कोस्प}\ ख}{१ + \text{कोस्प}\ ख} = \frac{१}{२}$$ (उत्तर प्रदेश १९३१)

(९) सिद्ध करो कि

$$\frac{\text{ज्या}^{२}\text{ थ} + \text{कोज्या}^{२}\text{ थ} - \text{व्युको}^{२}\text{ थ}}{\text{ज्या}^{२}\text{ थ} + \text{कोज्या}^{२}\text{ थ} - \text{व्युज्या}^{२}\text{ थ}} = \text{स्प}^{४}\text{ थ}$$

(१०) $$\frac{\text{ज्या थ} + \text{२ ज्या थ कोज्या थ}}{\text{१} + \text{कोज्या थ} + \text{कोज्या}^{२}\text{ थ} - \text{ज्या}^{२}\text{ थ}} = \text{स्प थ}$$

(११) $$\frac{\text{१} + \text{ज्या थ} - \text{कोज्या थ}}{\text{१} + \text{ज्या थ} + \text{कोज्या थ}} + \frac{\text{१} + \text{ज्या थ} + \text{कोज्या थ}}{\text{१} + \text{ज्या थ} - \text{कोज्या थ}} = \text{२ व्युज्या थ}$$

(१२) ज्या ३ क + ज्या ४ क + ज्या ५ क

= २ कोज्या २ क (ज्या क + ज्या २ क + ज्या ३ क)

(१३) कोस्प $\frac{१}{८}\pi$ − स्प $\frac{१}{८}\pi$ = २

(१४) कोस्प क + कोस्प २ क + कोस्प ४ क

= व्युज्या ४ क (२ + २ कोज्या २ क + ३ कोज्या ४ क)

(१५) $$\frac{\text{२ ज्या २ क} + \text{१}}{\text{२ ज्या २ क} - \text{१}} = \frac{\text{३} - \text{स्प}^{२}\text{ } (४५^{\circ} - \text{क})}{\text{१} - \text{३ स्प}^{२}\text{ } (४५^{\circ} - \text{क})}$$

(१६) ज्या^{२} य ज्या ३ य ज्या ७ य + ज्या^{२} ५ य ज्या य ज्या ३ य

= ज्या^{२} २ य ज्या ४ य ज्या ६ य (मद्रास १९०१)

(१७) यदि २ स्प ख + कोस्प ख = स्प क, सिद्ध करो कि

कोस्प ख = २ स्प (क − ख)

(१८) यदि य = क कोज्या (थ + ४५°)

र = क ज्या (थ − ४५°)

सिद्ध करो कि य^{२} + र^{२} = क^{२}

(१९) यदि य = स्प क, सिद्ध करो कि

$$\frac{\text{य} + \text{स्प ख}}{\text{१} - \text{य स्प ख}} = \text{ज्या (क + ख) व्युको (क + ख)}$$

(२०) यदि स्प (π कोज्या थ) = कोस्प (π ज्या थ), सिद्ध करो कि

$$थ = \frac{\pi}{४} + कोज्या^{-१}\left(\pm \frac{१}{२\sqrt{२}}\right)$$

(२१) यदि कोज्या^{२} थ $= \frac{क^{3} - १}{३}$, स्प^{3} $\frac{थ}{२}$ = स्प च,

सिद्ध करो कि

$$कोज्या^{\frac{२}{3}} च + ज्या^{\frac{२}{3}} च = \left(\frac{२}{क}\right)^{\frac{२}{3}}$$

(२२) यदि कोज्या क कोज्या य + कोज्या ख कोज्या र + कोज्या ग कोज्या ल = कोज्या^{२} क + कोज्या^{२} ख + कोज्या^{२} ग

= कोज्या^{२} य + कोज्या^{२} र + कोज्या^{२} ल = १

सिद्ध करो कि

$$\frac{कोज्या\ क}{कोज्या\ य} = \frac{कोज्या\ ख}{कोज्या\ र} = \frac{कोज्या\ ग}{कोज्या\ ल} = १$$

(२३) यदि स्प त स्प थ $\sqrt{\frac{क - ख}{क + ख}}$, सिद्ध करो कि

$$(क - ख\ कोज्या\ २\ त)(क - ख\ कोज्या\ २\ थ) = क^{२} - ख^{२}$$

(२४) यदि $थ_{१}$ और $थ_{२}$ समीकरण क स्प थ + ख ज्या थ = ग के मूल (roots) हों तो सिद्ध करो कि

$$स्प\ (थ_{१} + थ_{२}) = \frac{२\ ग\ क}{ग^{२} - क^{२}}$$

(२५) यदि कोज्या थ ज्या क = ज्या ख

कोज्या फ ज्या क = ज्या ग

कोज्या (थ − फ) = ज्या ख ज्या ग

सिद्ध करो कि

$$स्प^{२}\ क = स्प^{२}\ ख + स्प^{२}\ ग$$

(२६) यदि कोज्या क = कोज्या २ क, सिद्ध करो कि

कोज्या क = कोज्या $२^{स}$ क जहाँ स कोई धनात्मक पूर्णाङ्क संख्या है।

(२७) यदि क + ख + ग = १८०°, सिद्ध करो कि

$$\frac{\text{कोज्या क}}{\text{ज्या ख ज्या ग}} + \frac{\text{कोज्या ख}}{\text{ज्या ग ज्या क}} + \frac{\text{कोज्या ग}}{\text{ज्या क ज्या ख}} = २$$

सिद्ध करो:—

(२८) $\text{कोज्या क}\,(१ - २\ \text{कोज्या}\ २\ \text{क})^{२} + \text{ज्या}^{२}\ \text{क}\,(१ + २\ \text{कोज्या}\ २\ \text{क})^{२} = १$

(२९) $$\frac{\text{ज्या ३ क} - \text{कोज्या ३ क}}{\text{ज्या ३ क} + \text{कोज्या ३ क}} \times \frac{\text{ज्या क} - \text{कोज्या क}}{\text{ज्या क} + \text{कोज्या क}} = \frac{१ - २\ \text{ज्या २ क}}{१ + २\ \text{ज्या २ क}}$$

(३०) स्प ७५° − स्प ३०° − स्प ७५° स्प ३०° − १ = ०

(३१) $$\text{ज्या}\frac{\pi}{१४}\ \text{ज्या}\frac{३\pi}{१४}\ \text{ज्या}\frac{५\pi}{१४} = \frac{१}{८}$$

(३२) $$\frac{१}{\text{स्प थ} + \text{स्प ३ थ}} - \frac{१}{\text{कोस्प थ} + \text{कोस्प ३ थ}} = \text{कोस्प ४ थ}$$

(३३) $(\text{ज्या}^{४}\ \text{थ} + \text{कोज्या}^{४}\ \text{थ})\,(\text{स्प थ} + \text{कोस्प थ})^{२} = \text{स्प}^{२}\ \text{थ} + \text{कोस्प}^{२}\ \text{थ}$

(३४) $$\frac{१ + \text{ज्या क}}{\text{कोज्या क}} + \frac{\text{कोज्या ख}}{१ - \text{ज्या ख}} = \frac{२\ \text{ज्या क} - २\ \text{ज्या ख}}{\text{ज्या}\,(\text{क} - \text{ख}) + \text{कोज्या क} - \text{कोज्या ख}}$$

(३५) $\text{स्प}\ ७\tfrac{१}{२}^{\circ} = \sqrt{६} - \sqrt{३} + \sqrt{२} - २$

(३६) ज्या^{२} १२° + ज्या^{२} २१° + ज्या^{२} ३९° + ज्या^{२} ४८°
= १ + ज्या^{२} ९° + ज्या^{२} ४८°

(३७) ४ ज्या २७° = $(५ + \sqrt{५})^{\frac{१}{२}} - (३ - \sqrt{५})^{\frac{१}{२}}$

(३८) ज्या^{२} १०° + कोज्या^{२} २०° − ज्या १०° कोज्या २०°
= ज्या^{२} १०° + कोज्या^{२} ४०° + ज्या १०° कोज्या २०° = $\frac{३}{४}$

(३९) ज्या ४८° = $\frac{१}{८}\{\sqrt{१० + २\sqrt{५}} + \sqrt{३}(\sqrt{५} - १)\}$

(४०) (स्प $७\frac{१}{२}$° + स्प $३७\frac{१}{२}$° + स्प $६७\frac{१}{२}$°)
(स्प $२२\frac{१}{२}$° + स्प $५२\frac{१}{२}$° + स्प $८२\frac{१}{२}$°)
= $१७ + ८\sqrt{३}$

(४१) कोज्या $\frac{३}{१६}\pi$ + कोज्या $\frac{५}{१६}\pi$
= कोज्या $\frac{१}{१६}\pi$ (कोज्या $\frac{१}{४}\pi$ + ज्या $\frac{१}{४}\pi$)

(४२) गा = (का − खा) व्युक्रो थ जब कि स्प थ = $\frac{२\sqrt{\text{का खा}}}{\text{का − खा}}$

(४३) स्प $\frac{\text{ख − ग}}{२}$ = स्प^२ $\frac{\text{थ}}{२}$ कोस्प $\frac{\text{क}}{२}$, जब कि व्युज्या थ = $\frac{\text{ग}}{\text{ख}}$।

(४४) (कोज्या ६९° + कोज्या १९° + २ कोज्या ४५° कोज्या २३°)
(ज्या ६९° − ज्या १९° − २ ज्या ४५° ज्या २३°)
= ज्या ४६° कोज्या ८४°

(४५ {ज्या क + ज्या ख + ज्या (क + ख)}
{कोज्या क + कोज्या ख + कोज्या (क − ख) − १}
= ज्या २ क (१ + कोज्या ख) + ज्या २ ख (१ + कोज्या क)

(४६) दिया हुआ है कि स्प थ = $\frac{\text{स्प त + स्प द}}{\text{१ − स्प त स्प द}}$
सिद्ध करो कि
ज्या २ थ = $\frac{\text{ज्या}^२\text{ त + ज्या}^२\text{ द}}{\text{१ + ज्या}^२\text{ त ज्या}^२\text{द}}$

(४७) सिद्ध करो कि

लघु ज्या ८ य = ३ लघु २ + लघु ज्या य + लघु कोज्या य + लघु कोज्या २ य + लघु कोज्या ४ य

निम्न समीकरणों को हल करो:—

(४८) ज्या य + स्प य = ज्या २ य + २ ज्या य

(४९) ज्या ३ य = ४ ज्या य ज्या २ य ज्या ४ य

(५०) यदि किसी त्रिभुज में का = ३९८, खा = ५४,
ग = ८५° ५४′ १४,″ क और का मान बताओ जब कि
लघु २ = ·३०१०३, लघु ३ = ·४७७१२१३

सालघु कोस्प ४२°५७′ = १०·०३११०४, १′ का अन्तर = २५३३
सालघु स्प ३८°५१′ = ९·९०६०४३१, १′ का अन्तर = २५८६

(५१) किसी त्रिभुज की भुजायें २३७ और १५८ फीट हैं यदि उनके बीच का कोण ६६° ४०′ हो तो त्रिभुज को निर्धारित करो जब कि

लघु २ = ·३०१०३, लघु ७९ = १·८९७६३
लघु २२६८७ = ४·३५५७८,
सालघु कोस्प ३३°२०′ = १०·१८१९७
सालघु ज्या ३३°२०′ = ९·७३९९८,
सालघु स्प १६°५४′ = ९.४८२६२
सालघु स्प १६°५५′ = ९·४८३०८,
सालघु व्युको १६°५४′ = १०.०१९१७

(५२) यदि का = ९६, खा = ७५,
क = २७°१७′१०″, ख का मान बताओ.
जब कि लघु २ = ·३०१०३

सालघु ज्या ३७° १७′ = ६·७८२२६८५, १′ का अन्तर = १६५६

सालघु ज्या २८° १४′ = ६·६७४६१६४, १′ का अन्तर = २३५२

(५३) यदि का = ४४३६, खा = ४८६१, गा = ८५८३,
तो ख निकालो जब कि

लघु ८·६४१५ = ·६५१४१०४, लघु ४·४३६ = ·६४७२८५१

लघु ४·०८०५ = ·६१०७०२७, लघु ८·५८३ = ·६३३६३६१

सालघु ज्या ७८° ८′ = ६·६६०६१८०, सालघु ज्या ७८° ६′
= ६·६६०५६१४

(५४) यदि त्रिभुज क ख ग में क = ४५°२०′ ३०″,
खा = ५८५ गा = ४७३ तो ख, ग ज्ञात करो जब कि

लघु २ = .३०१०३००, लघु ७ = .८४५०६८०,
लघु ५२६ = २. ७२३४५५७

सालघु कोस्प २२° ४०″ = १०·३७६२१२८,

सालघु कोस्प २२°४१′ = १०·३७८८५७७

सालघु स्प १४° १३′ = ६.४०३७१८२

सालघु स्प १४°१४′ = ६. ४०४२४८६

लघु ५८५ = २·७६७ १५५६,

सालघु ज्या ४५° २०′ ३०″ = ६·८५२०५०६४

सालघु ज्या ८१° ३३′ ०·६२″ = ६·६६५२५६६

लघु ४२० = २.६२३२४६३, लघु ४२१ = २.६२४२८२१

(५५) यदि का = ५ फु०, खा = ८ फु० और
क = ३५° तो गा का मान बताओ जब कि

लघु ८ = .६०३०६०, लघु ५ = .६६८६७०

सालघु ज्या ३५° = ६·७५८५६१,

सालघु ज्या ६६° ३५′ = ६·६६२६७२

स्प लघु ज्या ६६° ३६′ = ९·६६२७२७

सालघु ज्या ३१° ३५′ ४२″ = ९·७१९२५८

लघु ४५६७०६ = ५.६५९६३७

(५६) यदि ख ग भुजा की माध्यिका (median) कोण क को य य और र दो भागों में विभाजित करे और म उसकी लम्बाई हो तो सिद्ध करो कि

$$२ \text{ म कोज्या } \frac{य-र}{२} = (खा + गा) \text{ कोज्या } \frac{क}{२}$$

निम्न समीकरणों से थ का लोप करो

(५७) का ज्या थ + खा कोज्या थ = का व्युज्या थ - खा व्युको थ = १

(५८) य = स्प थ + स्प २ थ , र = कोस्प थ + कोस्प २ थ

(५९) च कोज्या २ थ = कोज्या (थ + क);

च ज्या २ थ = २ ज्या (थ + क)

(६०) सरल करो

$$\text{स्प}\left(\frac{१}{२}\text{ज्या}^{-१}\frac{२\,य}{१+य^{२}} + \frac{१}{२}\text{ कोज्या}^{-१}\frac{१-र^{२}}{१+र^{२}}\right)$$

(६१) सिद्ध करो कि

$$\frac{\text{ज्या त}}{\text{ज्या (त−थ) ज्या (त−द)}} + \frac{\text{ज्या थ}}{\text{ज्या (थ−द) ज्या (थ−त)}}$$

$$+ \frac{\text{ज्या द}}{\text{ज्या (द−त) ज्या (द−थ)}} = ०$$

(६२) यदि स्प² त = २ स्प² थ + १, सिद्ध करो कि

(उत्तर प्रदेश १९३७)

कोज्या २ त + ज्या² थ = ०

(६३) यदि $त्र : त्रा : त्र_१ = २ : ५ : ११$, सिद्ध करो कि त्रिभुज समकोण त्रिभुज है। (उत्तर प्रदेश १६३४)

(६४) किसी प्रकाश गृह के सिरे से पूर्व की ओर दो जहाजों के नतांश ४५° और ३०° है यदि जहाजों के बीच की दूरी २०० फीट हो तो प्रकाशगृह की ऊँचाई बताओ। (राजपूताना १६४६)

(६५) एक व्यक्ति नदी के किनारे किसी मीनार की चोटी पर खड़े होकर नदी के दूसरे किनारे पर ध्वज-दण्ड का उन्नतांश कोण और जल में दण्ड के प्रतिविम्ब का उन्नतांश कोण निरीक्षण करके क्रमशः १५° और ६०° पाता है। यदि मीनार की ऊँचाई २०० फीट हो तो नदी की चौड़ाई निकालो।

(६६) यद $३ (१ + स्प^२ थ \, स्प^२ फ) = ८ \, स्प \, थ \, स्प \, फ$

$= स्प^२ थ + स्प^२ फ$, सिद्ध करो कि थ और फ का अन्तर $\frac{}{३}$ का कोई अपवर्त्य है।

सिद्ध करो कि

(६७) $४ (कोस्प^{-१} ३ + व्युज्या^{-१} \sqrt{५} \;) = \pi$

(कलकत्ता १६३६)

(६८) $स्प^{-१} \sqrt{य} = \frac{१}{२} कोज्या^{-१} \left(\frac{१ - य}{१ + य} \right)$

(कलकत्ता १६४३)

(६९ $ज्या \left[कोस्प^{-१} \left\{ कोज्या \left(स्प^{-१} य \right) \right\} \right]$

$= \sqrt{\frac{य^२ + १}{य^२ + २}}$ (बनारस १६४५)

(७०) किसी मीनार के दक्षिण में स्थित क विन्दु पर उसका उन्नतांश च है और क के पूर्व में ख विन्दु पर उन्नतांश छ है। यदि क ख = प, तो सिद्ध करो कि मीनार की ऊँचाई ल

$$ल^{2} \text{ (कोस्प}^{2} \text{ छ} - \text{कोस्प}^{2} \text{ च)} = प^{2}$$

द्वारा ज्ञात की जा सकती है। (पंजाब १६४३)

(७१) प फ एक ऊर्ध्वाधर मीनार है। क विन्दु उसी तल में है जिसमें प है; क पर मीनार के शिखर का उन्नतांश च है। क से ल दूरी पर ख विन्दु पर क प, ज कोण बनाती है और कोण प क ख = छ। सिद्ध करो कि मीनार की ऊँचाई

ल ज्या ज व्युज्या (छ + ज) स्प च

है। (मद्रास १६४८)

(७२) समतल भूमि पर खड़ी हुई एक मीनार, उत्तर को तरफ झुकी हुई है। मीनार के दक्षिण में, भूमि पर स्थित दो विन्दुओं से इन विन्दुओं की दूरी क्रमशः क और ख हैं। सिद्ध करो कि मीनार का ऊर्ध्वाधर रेखा के साथ झुकाव थ

$$\text{कोस्प थ} = \frac{\text{ख} - \text{क}}{\text{ख कोस्प च} - \text{क कोस्प छ}}$$

द्वारा प्राप्त किया जा सकता है। (आन्ध्र १६४७)

उत्तरमाला

अभ्यास १

(१) मख' पर (२) चतुर्थपाद (३) प्रथम पाद

(४) प्रथम पाद (५) द्वितीय पाद (६) चतुर्थ पाद

(७) $\frac{\text{१}}{\text{३}}$ (८) $\frac{\text{५}}{\text{६}}$ (९) $\frac{\text{९}}{\text{१०}}$

(१०) $\text{२}\frac{\text{४०३}}{\text{१२००}}$ (११) ·६५२०४५ (१२) १०·८०३९४९

(१३) ४४$^{\text{ग}}$ ४४` ४४·४`` (१४) ८३$^{\text{ग}}$ ३३` ३३·३``

(१५) ७०$^{\text{ग}}$ ४२` (१६) ४७२$^{\text{ग}}$ ५०`

(१७) ३९$^{\text{ग}}$ ७६` ३८·८`` (१८) ५५$^{\text{ग}}$ २५`

(१९) ४५$^{\circ}$ (२०) ४४$^{\circ}$ ३९′ ५२·४५२

(२१) १८३$^{\circ}$ १३′ ४२·८५२″ (२२) ९८$^{\circ}$ ४६′ ५·७″

(२३) ६८$^{\circ}$ १०′ ५४·३″ (२४) १८$^{\circ}$ ७′ ३८·४६″

अभ्यास २

(१) १९·२८ मी० प्रति घं०

(२) (क) ४५८$^{\circ}$ २१` ५८·४`` (ख) १८००$^{\circ}$ (ग) ६७५$^{\circ}$

(३) (क) $\frac{\text{१}}{\text{३}}\pi$ (ख) $\frac{\text{१३}}{\text{२०}}\pi$ (ग) १·२५१०१५π

(४) $\left(\frac{\text{७२०}}{\text{१४५३}}\right)^{\circ}$, $\left(\frac{\text{१६२०}}{\text{१४५३}}\right)^{\circ}$, $\left(\frac{\text{१४४००} \times \text{१८}}{\text{१४५३}}\right)^{\circ}$

(६) $\frac{४}{१५}\pi$ (७) १५°, ६०°, १०५°

(८) ६१°, ८१° (९) $\frac{४}{३}$ रेडियन

(१०) २०°, ६०°, १००° (११) $\frac{\pi}{३}$ (१२) १०,८

(१३) $\left[क\left(\frac{२०}{ख} - \frac{१८}{क}\right), ख\left(\frac{२०}{ख} - \frac{१८}{क}\right) \right]$

(१४) ८३° २०′, २७° (१५) ३·१४१६

(१६) $\frac{१}{४०००}$ रेडियन (१७) ३६५९ मील लगभग

(१८) $१\frac{२}{३}$ मी० (१९) २४०,००० मील

(२०) ६२,५००,००० (२१) ·०००५३ विकला

(२२) ६° (२३) $८७\frac{३}{३१}$ (२४) ७५°, ६०°, ४५°

अभ्यास ३

(१) ज्या थ $= \frac{६०}{६१}$, स्प थ $=\frac{६०}{११}$, कोस्प थ $=\frac{११}{६०}$, व्युज्या थ $=\frac{६१}{६०}$, व्युको थ $=\frac{६१}{११}$

(२) ज्या थ $= \frac{\sqrt{५}}{३}$, स्प थ $= \frac{\sqrt{५}}{२}$, कोस्प थ $= \frac{२}{\sqrt{५}}$, व्युज्या थ $=\frac{३}{\sqrt{५}}$, कोज्या थ $=\frac{२}{३}$

(३) कोज्या थ $= \frac{२\sqrt{२}}{३}$, स्प थ $= \frac{१}{२\sqrt{२}}$, कोस्प थ $= २\sqrt{२}$, व्युज्या थ $= ३$, व्युको थ $\frac{३}{२\sqrt{२}}$

(४) कोज्या थ $= \frac{१२}{३७}$, स्प $= \frac{३५}{१२}$ इत्यादि

(५) ज्या थ $= \frac{७}{५\sqrt{२}}$, कोज्या थ $= \frac{१}{५\sqrt{२}}$, स्प थ $= ७$

(६) ज्या थ $= \frac{१}{१+क^२}$, कोज्या थ $= \frac{क}{१+क^२}$,

स्प थ $= \frac{१}{क}$

(७) ज्या थ $= \frac{प}{\sqrt{प^२+फ^२}}$, कोज्या थ $= \frac{फ}{\sqrt{प^२+फ^२}}$

इत्यादि

(११) ·४५४ (१२) $\frac{म^२ - न^२}{२ मन}$

(१४) ज्या थ $= \frac{२ य (य+१)}{२ य^२+२ य+१}$,

कोज्या थ $\frac{२ य+१}{२ य^२+२ य+१}$

अभ्यास ५

(१६) $\frac{३}{४}$ (२०) $५२\frac{१}{२}^\circ, ७\frac{१}{२}^\circ$

अभ्यास ६

(१) ऋण (२) ऋण (३) धन (४) ऋण
(५) ऋण (६) ऋण (७) धन

अभ्यास ७

(१८) १ + व्युको थ (१९) ० (२०) २ (२१) ३

(२२) ० (२३) स्प^{३} थ (२४) −१

अभ्यास ८

(१) धन (२) ऋण (३) ऋण (४) धन

(५) धन (६) धन (७) ऋण (८) धन

(९) ऋण (१०) ऋण (११) ऋण (१२) ऋण

(१३) धन (१७) $\frac{\pi}{४}$, $\frac{१}{\sqrt{२}}$

अभ्यास ९

(४) $\frac{\sqrt{३}}{२}$ (५) $\frac{१}{\sqrt{२}}$ (६) १

(७) $२ - \sqrt{३}$, $\frac{\sqrt{३} - १}{२\sqrt{२}}$ (८) ज्या ख

अभ्यास १०

(२) $३\frac{३}{७}$ (३) ३.

अभ्यास ११

(३९) २ कोज्या थ (४०) $\frac{१}{१६}$ कोज्या थ ज्या^{४} २थ

अभ्यास १२

(१) कोज्या क − कोज्या ५ क

(२) ज्या ११०° − ज्या १०° (३) कोज्या १२ थ + कोज्या ६थ

(४) ज्या $\frac{३ क + ख}{२}$ + ज्या $\frac{३ ख - क}{२}$

(५) ज्या (क + न थ) − ज्या { क + ($\overline{\text{न} - २ \text{थ}}$) }

अभ्यास १३

(१) $\frac{}{३०५}, \frac{४६}{३०५}$ (२) $\frac{७}{५\sqrt{२}}$

(३) $\frac{\sqrt{४ - \sqrt{२} - \sqrt{६}}}{२\sqrt{२}}$ (४) $\frac{\sqrt{४ + \sqrt{२} + \sqrt{६}}}{२\sqrt{२}}$

(५) ($\sqrt{३} - \sqrt{२}$) ($\sqrt{२} + १$) (६) $\sqrt{२} - १$

(७) $-(\sqrt{२} + १) + \sqrt{४ + २\sqrt{२}}$

(२६) $\frac{१ - \text{च स्प}^{२} \frac{\text{ख}}{२}}{१ + \text{च स्प}^{२} \frac{\text{ख}}{२}}$ (२७) − −

(२८) + + (२९) + + (३०) + +

(३४) $२ \text{ स } \pi + \frac{\pi}{४}$, $२ \text{ स } \pi + \frac{३\pi}{४}$

(३५) $२ \text{ स } \pi - \frac{\pi}{४}$, $२ \text{ स } \pi + \frac{\pi}{४}$

(३६) $२ \text{ स } \pi + \frac{३ \pi}{४}$ $२ \text{ स } \pi + \frac{५ \pi}{४}$

(३७) $२ \text{ स } \pi + \frac{\pi}{४}$, $२ \text{ स } \pi + \frac{३ \pi}{४}$

अभ्यास १६

(१) (क) $\text{स } \pi + (-१)^{\text{स}} \frac{\pi}{६}$ (ख) $२ \text{ स } \pi \pm \pi$

(ग) $२ स \pi \pm \frac{\pi}{६}$ (घ) $स \pi + \frac{\pi}{४}$

(ङ) $स \pi + (-१)^{स} \frac{\pi}{६}$

(च) $स \pi + (-१)^{स} \left(\pm \frac{\pi}{६} \right)$

(२) $स \pi \pm \frac{\pi}{६}$ (३) $२ स \pi \pm \frac{२ \pi}{३}$

(४) $स \pi + (-१)^{स} \frac{\pi}{३}$ (५) $\frac{स \pi}{५} + (-१) \frac{\pi}{३०}$

(६ $२ स \pi \pm \frac{\pi}{३}$

(७) $स \pi + \frac{\pi}{४}$ अथवा $स \pi + \frac{\pi}{३}$

(८) स्प थ $= \frac{१}{च}$ अथवा $- \frac{१}{छ}$

(९) $२ स \pi$, ($२ स \pi \pm$ कोज्या$^{-१} \frac{२}{३}$)२

(१०) ज्या थ $= \frac{\pm \sqrt{१७} - १}{८}$

(११) $२ स \pi$, $२ स \pi \pm$ कोज्या$^{-१} \left(\frac{१}{३} \right)$

(१२) $स \pi \pm \frac{\pi}{४}$

(१३) $२ स \pi \pm \pi$, $२ स \pi \pm \frac{\pi}{३}$

(१४) $२ स \pi \pm \frac{५ \pi}{६}$ (१५) $\frac{१}{२} \left(स \pi + \frac{\pi}{४} \right)$

(१६) $स\pi + \frac{\pi}{६}$ (१७) $२ स \pi;\ २ स \pi \pm \pi$

(१८) $\frac{स \pi}{२} + (-१)^{स} \frac{\pi}{४},\ \frac{स \pi}{२} + (-१)^{स} \left(-\frac{\pi}{१२}\right)$

(१९) $स\pi + \frac{\pi}{४}$

(२०) $स \pi,\ स \pi + स्प^{-१}\left(\pm \sqrt{\frac{५}{३}}\right)$

(२१) $२ स \pi \pm \frac{\pi}{२},\ २ स \pi \pm \frac{\pi}{३}$

(२२) $\frac{स \pi}{८}$ अथवा $स \frac{\pi}{१०}$

(२३) $थ = स \pi + (-१)^{स}\left(\frac{\pi}{३} - थ\right)$

(२४) $२ स \pi$ अथवा $\frac{२ स \pi}{५}$

(२५) $\frac{स \pi}{च + छ},\ \frac{स \pi}{च - छ}$

(२६) $\left(२ स + \frac{१}{२}\right) \frac{\pi}{५}$ अथवा $२ स \pi - \frac{\pi}{२}$

(२७) $\frac{१}{८}\left(स \pi + \frac{\pi}{२} + क\right),\ \left(स \pi - \frac{\pi}{२} - क\right)\frac{१}{६}$

(२८) $\left(२स + \frac{१}{२}\right)\frac{\pi}{च + छ},\ \left(२ स - \frac{१}{२}\right)\frac{\pi}{च - छ}$

(२९) $\frac{१}{७}\left(स \pi + \frac{\pi}{२}\right)$ (३०) $\left(स + \frac{१}{२}\right)\frac{\pi}{४}$

(३१) $\frac{स \pi}{४} \pm \sqrt{१ + \frac{स^{२} \pi^{२}}{१६}}$

(३२) $\left(स + \frac{१}{२}\right)\frac{\pi}{३} \pm \frac{क}{३}$ (३३) $स\pi + \frac{\pi}{२४}$

अभ्यास १७

(१) $\frac{२स\pi}{३}$ या $\left(स + \frac{१}{४}\right)\pi$ या $\left(२स - \frac{१}{२}\right)\pi$

(१) $\left(२स \pm \frac{१}{२}\right)\frac{\pi}{३}$ या $स\pi + (-१)^{स}\frac{\pi}{६}$

(३) $\frac{स\pi}{२}$ या $२स\pi \pm \pi$

(४) $२स\pi \pm \frac{\pi}{२}$,

$\frac{२}{५}\left[२स\pi \pm \frac{\pi}{२}\right]$, $२स\pi$

(५) $\left(स\pi \pm \frac{\pi}{४}\right)$ या $२स\pi \pm \frac{२}{३}\pi$

(६) $स\pi + \frac{\pi}{८}$

(७) $२स\pi \pm \frac{\pi}{२}$, $\frac{२}{५}स\pi$, $२\left(२स\pi \pm \frac{\pi}{२}\right)$

(८) $२स\pi + \frac{\pi}{२}$, $\frac{(४र+१)\pi}{१०}$

जहाँ कि र कोई पूर्ण संख्या है।

(९) $\frac{२स\pi}{३}$, $\left\{स\pi + (-१)^{स}\frac{\pi}{२}\right\}\frac{१}{२}$

(१०) $२स\pi$, $\left(\frac{२स}{३} + \frac{१}{२}\right)\pi$

(११) $स\pi + क$, $२स\pi \pm \frac{२\pi}{३}$

(१२) $२स\pi \pm \frac{\pi}{२} - क, २स\pi \pm \frac{\pi}{३}$

(१३) $स\frac{\pi}{४}, \frac{स\pi}{१२}$

(१४) $स\pi, \frac{स\pi}{३} + (-१)^{स} \frac{\pi}{१८}$

(१५) $\left(स\pi + (-१)^{स} \frac{\pi}{६}\right), स\pi + (-१)^{स} \frac{\pi}{१०},$

$स\pi - (-१)^{स} \frac{३\pi}{१०}$ (-ज्या (क-थ) के स्थान पर -ज्या (क + थ) पढ़ो)

(१६ $\left(स + \frac{१}{२}\right)\frac{\pi}{८}, \left(स + \frac{१}{२}\right)\frac{\pi}{२}$

(१७) $स\pi, स\pi + (-१)^{स} \frac{\pi}{४} + \frac{\pi}{४}$ (१८) $स\pi \pm \frac{\pi}{३}$

(१९) $\frac{१}{२}\left(स\pi + (-१)^{स}क\right)$ जहाँ कि ज्या $क = \frac{८-४\sqrt{१३}}{६}$

(२०) $स\pi, स\pi + \frac{\pi}{४}$ (२१) $र\pi, \frac{र\pi}{स-र}, \left(२र \pm \frac{१}{२}\right)\frac{\pi}{स}$

(२२) $स\pi + \frac{\pi}{२}, स\pi \pm \frac{\pi}{४}$ (२३) $स\pi, \frac{स\pi}{२}, स\pi \pm \frac{\pi}{३}$

(२४) $स\pi, \frac{१}{४}\left[स\pi + (-१)^{स} \frac{\pi}{६}\right]$

(२५) $(स+१)\frac{\pi}{४}, स\pi$

(२६) $स\pi, स\pi - \frac{\pi}{४}$ (२७) $\frac{स\pi}{६}$ (२८) $\frac{स\pi}{१२}$

(२९) $स\pi + \frac{\pi}{६} + (-१)^{स} \frac{\pi}{४}$ (३०) $२स\pi$, $२स\pi + \frac{\pi}{४}$

(३१) $२ स\pi + क$ जहाँ कि कोज्या $क = \frac{३}{५}$

(३२) $२ स\pi \pm ख - क$ जहाँ कि कोज्या $क = \frac{२४}{२५}$,

कोज्या $ख = \frac{१}{५}$

(३३) $२ स\pi + \frac{\pi}{३}$

(३४) $२ स\pi + \frac{\pi}{२}$, $२ स\pi - \frac{१}{६}\pi$

(३५) $स\pi + \frac{\pi}{४} - क$, $स\pi - \frac{\pi}{४}$ जहाँ कि ज्या $क = \frac{३}{\sqrt{१०}}$

(३६) $स\pi - \frac{\pi}{४} + क$, $स\pi + \frac{\pi}{४}$ जहाँ कि ज्या $क = \frac{१}{\sqrt{५}}$

(३७) $\frac{१}{२} स\pi + (-१)^{स} \frac{\pi}{१२}$

(३८) $२ स\pi \pm \frac{\pi}{३} + \frac{\pi}{३}$ (३९) $स\pi$

(४०) $\frac{१}{२}(स\pi + क)$ जहाँ कि स्प $क = २$

(४१) $स\pi + (-१)^{स} २१^\circ ४८' - ६८^\circ १२'$

(४२) $२स\pi + \frac{\pi}{२}$, $२ स\pi + १२^\circ ४२'$

(४३) $४ स\pi \pm \frac{२\pi}{३}$ (४४) $स\pi + \frac{\pi}{६}$

(४५) $२स\pi, २स\pi \pm \frac{\pi}{२}, २स\pi \pm \pi, २स\pi \pm \frac{\pi}{३}, २स\pi \pm \frac{२\pi}{३}$

(४६) $२स\pi \pm \frac{\pi}{३},\ स\pi + (-१)^{स}\frac{\pi}{६},\ २स\pi \pm \frac{४\pi}{३}$

(४७) $स\pi + (-१)^{स}\left(-\frac{\pi}{२}\right)$

(४८) $२स\pi,\ स\frac{\pi}{२},$

(४९) $२स\pi \pm \frac{\pi}{२},\ \left(२स + \frac{१}{४}\right)\frac{\pi}{५},\ \left(२स - \frac{१}{४}\right)\frac{\pi}{३}$

(५०) $२स\frac{\pi}{३},\ २स\pi$

(५१) $२स\pi \pm \frac{\pi}{१०},\ २स\pi \pm \frac{\pi}{२}$ (५२) $स\pi \pm \frac{\pi}{१२}$

(५३) $स\pi + \frac{\pi}{४},\ \left(\frac{१}{२}स\pi + (-१)^{स}\frac{\pi}{४}\right)$

अभ्यास २०

(१) २·७६५८८, ३·३९७९४

(२) १·६२३२३; १·८७६२, १·९०८४

(३) ·७६५६ (४) ३·८८१९ (६) $\frac{न}{न-१}$

(१६) ·०६९७४ (१७) ·५०१ (१८) ·४१३०९

(१९) क) २ (ख) ० (ग) ४ (घ) ० (ङ) ३ (च) $\bar{४}$

(२०) १·५७०६, $\bar{४}$·५७०६, ७·५७०६

(२१) २·४३२, २४.३२, ·०२४३२

(२२) १३, ६, ३०, ३१, २५, ४१, ६६,

(२३) ४, ६, ३१, ७९ (२४) ९.०७६ (२५) १२.४७

(२६) .०००९०६, (२७) $\bar{१}$.५३४६६४८६६७ (२८) १.६३९

(२९) $\bar{१}$.८९६९०९२ (३०) .०४८४४५४४ (३१) (क) १.७७

(ख) $\dfrac{\text{लघु } २ - १}{२ (\text{लघु } २ + \text{लघु } ३) - १}$ (ग) $\dfrac{३}{२२}$

(घ) $\dfrac{४ \text{ लघु } २ + ७ \text{ लघु } ३}{\text{लघु } २ + ३ \text{ लघु } ३ - २ \text{ लघु } ७}$

(ङ) $\dfrac{२ \text{ लघु } ३ (२ \text{ लघु } २ - \text{लघु } ३)}{५ \text{ लघु } २ \text{ लघु } ३ + ३ \text{ लघु } २ \text{ लघु } ७ - \text{लघु } ३ \text{ लघु } ७ - २ \text{ लघु}^२ ३}$,

$\dfrac{२ \text{ लघु } २ \text{ लघु } ३}{५ \text{ लघु } २ \text{ लघु } ३ + ३ \text{ लघु } २ \text{ लघु } ७ - \text{लघु } ३ \text{ लघु } ७ - २ \text{ लघु}^२ ३}$

(३३) २० वर्ष (३४) २०.६३% (३५) लघु य = $\dfrac{\text{क} + ३ \text{ ख}}{५}$,

लघु र = $\dfrac{\text{क} - २ \text{ ख}}{५}$

अभ्यास २१

(१) ४.७६२१२६४२५

(२) ५.७६४२७७८ (लघु ५८११३० = ५.७६४२७३३ पढ़ो)

(३) १.३६८६६४६

(४) .१०६८६७

(५) .६८७०४१७

(६) १.२१५४८३८

(७) .२१२२७२४

(८) १.१६७५९०५

(९) १.३०३१७३१

(१०) १७° २७′ २७.३″ (२७″ के स्थान पर २७′ पढ़ो)

(११) ४१° २४′ ३४.६″

(१२) ९.९१४७३३४

(१३) १०.२७१४०३९

(१४) ९.७८६७३१५

(१५) ५३° १३′ ५५″

(१६) १०.४७३२९४४

(१७) १०° १५′ ३४″ (९.१३ के स्थान पर ९९९३ पढ़ो)

(१८) ९.७५००४९१

(१९) ९.८७१८४८६

(२०) ५०° ७′ ५.३″

अभ्यास २२

(१) (क) [illegible]·७ से० मी०, १२ से० मी० (ख) ४,८

(२) (क) ६″, ६√२ (ख) $\frac{८}{३}\sqrt{३}$, $\frac{४}{३}\sqrt{३}$ (ग) ३√३″,३″

(३) (क) ∠ग=६०°, का = ३०० से० मी०, खा = ४०० से० मी०

(ख) ∠क = ६०°, खा = १४·१४ फुट गा = ५ फुट

(कोण ख = ७०° ३२′ पढ़ो)

(४) ४८° ३५′ २५″, ३६° ५२′ १२″, ६४° ३२′२३″

(५) ७५°, १५°

(६) ४६° १६′ ३०·२″, ४०° ४०′ २६·८″

अभ्यास २३

(१) ४५°, १२०°, १५° (२) ४५°, ६०°, ७५°

(३) ६०°, १५°, ७५° (५) १२०°

(६) १०४° २८′ ३६″ (७) ५८° ५१′ ३३′

(८) १३२° ३४′ ३२″ (५६° के स्थान पर ६६° और२ ३०५६६७ के स्थान पर ३·०३०६० पढ़ो)

(९) ∠क = ४३° २′ ५६·६″ (लघु २ और लघु ३ के मान का भी प्रयोग करो)

(१०) ५५° ४६′ १७″

(११) क = ४३° २′ ५६″, ८३° १०′ २२″

(१२) १०२° १′ २८″

(१३) १२° ३६′ १५·७″ (दिया हुआ अन्तर ३ अंकों का है)

(१४) ५७° ५१′ ४६·४″ (१५) ८८° ५१′ ४०·१″

(१६) ४८° ११′ २३″, ५८° २४′ ४३″, ७३° २३′ ५४″

(१७) ४०° ०′ ३२″, ५५° ५७′ २८″, ८४° २′

अभ्यास २४

(१) ४५°, ७५°, √६ (२) ३०°, ९०°

(३) ·८९६५ (४) १५°, १०५°, √६

(६) ७१° ४४′ २९·५″, ४८° १५′ ३०·५″

(७) ख = ३४° १८′ १″ ग = १° ४१′ ५९″

(८) क = ९७° ५५′ ४९·५″, ख = ६०° ४′ १०·५″

(इस प्रश्न म लघु १५ = १·१७६०९१३ सालघु स्प १८° ५५′ ९·५२३४९१६१ पढ़ो)

(९) ख = ९४° ४२′ ५४″ ग = २५° १७′ ६″

(१०) ५५° १०′ ४१·२″, ३२° २४′ ३९·४″, ९२° २४′ ३९·४″

(११) ख = ७६° ४७′ २·२″, ग = ४९° १२′ ५७·८″

(१२) ख = ८२° १०′ ४९″ ग = ५०° २४′ ११″

(१३) ११६° ३३′ ५४″, २६° ३३′ ५४″

(१४) ४९° ६′ २३·२″, ७०° ५३′ ३६·८″, ६०°

(१५) ४०° ५३′ ३६″, १९° ६′ २४″, $\frac{\sqrt{७}}{२}$

(१६) ८√७, ७९° ६′ २३·८″, ४०° ५३′ ३६·२″

(१७) ख = १०८° ३६′ ३०″ ग = ३१° २३′ ३०″

(१८) ख = ७८° १७′ ३९·६″, ग = ४९° ३६′ २०·४″

(१९) १०८° १२′ २६″, ४९° २७′ ३४″

(२०) ख = ९०° ३७′ ३९·६″ ग = ४६° २२′ २०·४″

(२१) १०५° १९′ १२″, १५° १९′ १२″

(२२) ५३° ७′ ४८·२″, १०८° २६′ ५·९″, १८° २६′ ५·९″

अभ्यास २५

(१) ७५°, का = गा = २√३ + २ (२) क = ७५°, ३√६

(३) १७२·६४३६ फी फुट (४) १२·३९६३२

(५) खा = २३७, ग = १५८·१ (६) ६५१० गज

(७) ३१° २०′, खा = १८५, गा = १६२

(६) ७६° ४७′ २·२″, ४६° १२′ ५७·८″

(१०) ७६६·८६२२ (११) २६१·७६३, २६१·२०८

(इस प्रश्न में लघु ३४५ = २·५३७८१६१ पढ़ो)

(१२) १४·३५६२६ फुट

अभ्यास २६

(१) ग = ७५°, १०५° क = ६०°, ३०° का = $\sqrt{६}$, $\sqrt{२}$

(२) ख = १५°, १०५°, ग = १३५°, ४५°, खा = $\frac{\sqrt{६}-\sqrt{२}}{२}$, $\frac{\sqrt{६}+\sqrt{२}}{२}$

(३) क = ४५°, ग = ७५°, गा = $\sqrt{३}+१$

(४) ६०° अथवा १२०° (११) ३०° (१२) ६०·३८६३

(१३) ५७° ३०′ ११·८″, १२२° २६′ ४१·२″

(१४) ग = ३६° ३५′ ११″, क = २८° २०′ ४६″

(१५) १७·१, ख = ४१° ४८′ ३६″, ग = १०८° ११′ २१″

(१६) ग = ५८° ५६′ ५६·३″, १२१° ३′ ३·७″, क = ८७° ४८′ ३·७″, २५° ४१′ ५६·३″

(१७) ६५° ५६′, ४१° ५६′ १२″

(१८) ४६° १६′ ५·५″, १०° ४३′ ५४·५″

(१९) ७१° १५′ ३८″, १०८° ४४′ २२″, ५७° १७′ २२″, १६° ४८′ ३८″, ३१६·३, १०५·१६०७

अभ्यास २८

(१) ८, ५ ७ (२) $२\sqrt{\frac{६}{११}}$, $\sqrt{\frac{२२}{३}}$, $\sqrt{\frac{३३}{२}}$, $२\sqrt{६६}$

(३) ३, ४, ५, ६०° (४) $१५\frac{५}{८}$, ४, ४४,

अभ्यास ३०

(१) $\frac{५००}{\sqrt{३}}$ (२) $\frac{क}{२\sqrt{३}}$

(३) १३६·६ (४) ५०० ($\sqrt{३}$ − १)

(५) ४५ (६) २०

(७) $\frac{\sqrt{३}}{२}$ क, $\sqrt{३}$ क (८) $\frac{१}{२}$ (३ ± $\sqrt{३}$)

(९) ५° ३१′ ३९·१४″ (१०) ३० (१ + $\sqrt{३}$)

(११) $१३३\frac{१}{३}$ (१२) ४०$\sqrt{६}$, ४०$\sqrt{२}$ ($\sqrt{७}$ + १)

(१३) $\frac{१}{४}\sqrt{६}$ ($\sqrt{५}$ + १) (१५) ३३·०७, $१७\frac{१}{२}$

(१७) ५० (१८) १०० (३ + १)

(१९) १०,००० फुट (२०) १२०

(२२) $\frac{५}{१३}\sqrt{२५६६ + ४\sqrt{१३४}}$ (२४) ४२१ फुट प्रति मिनट।

अभ्यास ३१

(१) $\sqrt{२१३५}$ फुट, नीचे का भाग १२ फी०, ऊपर का १३ फी० पढ़ो।

(४) $६६\frac{२}{३}$, $२६६\frac{२}{३}$ (१३) ६,२

अभ्यास ३२

(४६) $\frac{१}{\sqrt{२}}$ (४७) $\frac{१}{२}$ (४८) १

(४९) $\frac{१}{३}$ (५०) $\frac{३\sqrt{३} - \sqrt{७}}{८}$ (५१) $\left(\frac{१}{४}, -८\right)$

(५२) $\frac{१}{६}, -१$ (५३) $\frac{\text{क} + \text{ख}}{१ - \text{कख}}$ (५४) $-\frac{५}{९}$

(५५) $\pm\frac{१}{\sqrt{२}}$ (५६) २ (५७) $\pm\frac{१}{१४}\sqrt{२१}$

(५८) $\sqrt{३}$

(५९) $\text{य}^४ - \text{य}^३(\text{क} + \text{ख} + \text{ग} + \text{घ})$
$- \text{य}^२(\text{कख} + \text{कग} + \text{कघ} + \text{खग} + \text{घख} + \text{गघ})$
$+ \text{य}(\text{कखग} + \text{कखघ} + \text{खगघ} + \text{कगघ}) + \text{कखगघ}$
$= ०$ समीकरण से य का मान प्राप्त हो सकता है।

(६०) $\frac{\text{क} - \text{ख}}{१ + \text{कख}}$ (६१) १ (६२) स्प $\frac{११}{२४}\pi$, स्प $\frac{३}{८}\pi$

(६३) $\frac{१}{\sqrt{२}}, \frac{१}{\sqrt{२}}$

अभ्यास ३३

(१) $\text{य}^२ + \text{र}^२ = १$ (२) $\frac{\text{य}^२}{\text{क}^२} - \frac{\text{र}^२}{\text{ख}^२} = १$ (३) $\text{र}^२ = ४\text{कय}$

(४) $\frac{\text{य}^२}{\text{क}^२} - \frac{\text{र}^२}{\text{ख}^२} = १$ (५) $\text{य}^{\frac{२}{३}} + \text{र}^{\frac{२}{३}} = १$

(६) $\text{य}^२ - \text{र}^२ = \sqrt{\text{यर}}$ (७) $\text{य}^२ - \text{र}^२ = ४\sqrt{\text{यर}}$

(८) $\text{य}^{\frac{४}{३}}\text{र}^{\frac{२}{३}} - \text{य}^{\frac{२}{३}}\text{र}^{\frac{४}{३}} = १$ (९) $\text{य}^२ + \text{र}^२ = २$

(१०) $(\text{र}\text{क}' - \text{क}\text{र}')^२ + (\text{क}\text{य}' - \text{य}\text{क}')^२ = (\text{र}\text{य}' - \text{य}\text{र}')^२$

(११) $\text{य}^{\frac{२}{३}} + \text{र}^{\frac{२}{३}} = (\text{यर})^{-\frac{२}{३}}$

(१२) $९\text{य}^२ + ४\text{र}^२ - ६\sqrt{३}\,\text{यर} = ९$

(१३) $य^2 + र^2 - २$ यर ज्या $(क + ख) =$ कोज्या$^2 \ (क + ख)$

(१४) $\frac{य^2}{क^2} + \frac{र^2}{ख^2} - \frac{२ \ यर}{क \ ख}$ कोज्या $(म + म') =$ ज्या$^2 (म + म')$

(१५) $(य + र)^{\frac{2}{3}} + (य - र)^{\frac{2}{3}} = २ \ क^{\frac{2}{3}}$

(१६) $य = \frac{क^2 - र^2}{क^2 + र^2} क$

(१७) $य^2 + र^2 = २ \ क^2$, (१८) $\frac{य^2}{ख^2} + \frac{र^2}{क^2} = १$

(१९) $(कय)^{\frac{2}{3}} + (खर)^{\frac{2}{3}} = (क^2 - ख^2)^{\frac{2}{3}}$

(२०) $(य^2 + र^2 + २ \ क \ य)^2 = ४क^2(य^2 + र^2)$

(२१) $य^2 + र^2 - २$ कोज्या $क = २$ (२२) $य^2 + र^2 = क^2 + ख^2$

(२३) $य^2 + र^2 + ल^2 = क^2$

(२४) यर = (र − य) स्प क

(२५) क + ख = २ क ख

(२६) $(य^2 + र^2)^2 - ४ \ य^2 = \frac{८ \ यर}{ल}$

(२७) $\frac{१}{य} + \frac{१}{र} = \frac{१}{क} + \frac{१}{क'}$

अभ्यास ३५

(४८) $स\pi, \ २ \ स\pi \pm \frac{\pi}{३}$ (४९) $स\pi \ (स \pm \frac{१}{३})\frac{\pi}{२}$

(५०) क = ८५° ५४′ १५″ ख = १८° ९′ ३१″

(५१) २२६·८७ फुट, ७३° ३४′ ५०″, ३९° ४५′ १०″

(५२) २८° १४′ ५०″ (५३) २३° ४५′ ४६″

(५४) ८०° ३३′ ०·६२″, ५३° ५′ २९·२८″

(५५) ४ फुट ६-८०४७२ इं०

(५७) $का^{२} + खा^{२} = १ + खा^{\frac{२}{३}} - खा^{\frac{४}{३}}$

(५८) $(य + ३ र)^{२} = यर^{२} (य + २ र)$

(५९) $(च^{२} - १)^{३} = २७ च^{२} कोज्या^{२} क ज्या^{२} क$

(६०) $\frac{य + र}{१ - यर}$ (६४) $१०० (\sqrt{३} + १)$ (६५) $१०० \sqrt{३}$

समतल त्रिकोणमिति के मूल सूत्र

(१) वृत्त की परिधि = २ π त्र

π का मान = ३·१४१५९२६५३..........

$$\left(\text{निकटतम मान } \frac{२२}{७}, \frac{३५५}{११३} \ldots\ldots \right)$$

$$\frac{१}{\pi} = \cdot ३१८३०९८९.$$

रेडियन = ५७° १७′ ४४·८″

$$\text{कोण} = \frac{\text{चाप}}{\text{त्रिज्या}} \times \text{रेडियन}$$

दो समकोण = १८०° = २००$^{\text{ग}}$ = π रेडियन

(२) ज्या^{२} क + कोज्या^{२} क = १

व्युको^{२} क = १ + स्प^२ क

व्युज्या^{२} क = १ + कोस्प^२ क

(३) ज्या ०° = ० ; कोज्या ०° = ०

$$\text{ज्या } ३०° = \frac{१}{२}, \text{ कोज्या } ३०° = \frac{\sqrt{३}}{२}$$

$$\text{ज्या } ४५° = \text{कोज्या } ४५° = \frac{१}{\sqrt{२}}$$

ज्या ६०° $= \frac{\sqrt{३}}{२}$; कोज्या ६०° $= \frac{१}{२}$

ज्या ९०° $=$ १ ; कोज्या ९०° $=$ ०

ज्या १५° $= \frac{\sqrt{३}-१}{२\sqrt{२}}$ कोज्या १५° $= \frac{\sqrt{३}+१}{२\sqrt{२}}$

ज्या १८° $= \frac{\sqrt{५}-१}{४}$, कोज्या १८° $= \frac{\sqrt{१०+२\sqrt{५}}}{४}$

ज्या ३६° $= \frac{\sqrt{१०-२\sqrt{५}}}{४}$, कोज्या ३६° $= \frac{\sqrt{५}+१}{४}$

ज्या २२$\frac{१}{२}$° $= \frac{\sqrt{२-\sqrt{२}}}{२}$, कोज्या २२$\frac{१}{२}$° $= \frac{\sqrt{२+\sqrt{२}}}{२}$

(४) ज्या (– थ) = – ज्या थ,

कोज्या (– थ) = कोज्या थ

ज्या (९०° – थ) = कोज्या थ,

कोज्या (९०°–थ) = ज्या थ

ज्या (९०° + थ) = – कोज्या थ,

कोज्या (९०° + थ) = – ज्या थ

ज्या (१८०° – थ) = ज्या थ,

कोज्या (१८०° – थ) = – कोज्या थ

ज्या (१८०° + थ) = – ज्या थ,

कोज्या (१८०° + थ) = – कोज्या थ

(५) ज्या (क + ख)

= ज्या क कोज्या ख + कोज्या क ज्या ख

कोज्या (क + ख) = कोज्या क कोज्या ख – ज्या क ज्या ख

ज्या (क – ख) = ज्या क कोज्या ख – कोज्या क ज्या ख

$$\text{कोज्या}\,(\text{क} - \text{ख}) = \text{कोज्या क कोज्या ख} + \text{ज्या क ज्या ख}$$

$$\text{ज्या ग} + \text{ज्या घ} = २\ \text{ज्या}\ \frac{\text{ग} + \text{घ}}{२}\ \text{कोज्या}\ \frac{\text{ग} - \text{घ}}{२}$$

$$\text{ज्या ग} - \text{ज्या घ} = २\ \text{कोज्या}\ \frac{\text{ग} + \text{घ}}{२}\ \text{ज्या}\ \frac{\text{ग} - \text{घ}}{२}$$

$$\text{कोज्या ग} + \text{कोज्या घ} = २\ \text{कोज्या}\ \frac{\text{ग} + \text{घ}}{२}\ \text{कोज्या}\ \frac{\text{ग} - \text{घ}}{२}$$

$$\text{कोज्या ग} - \text{कोज्या घ} = २\ \text{ज्या}\ \frac{\text{ग} + \text{घ}}{२}\ \text{ज्या}\ \frac{\text{घ} - \text{ग}}{२}$$

$$२\ \text{ज्या क कोज्या ख} = \text{ज्या}\,(\text{क} + \text{ख}) + \text{ज्या}\,(\text{क} - \text{ख})$$

$$२\ \text{कोज्या क ज्या ख} = \text{ज्या}\,(\text{क} + \text{ख}) - \text{ज्या}\,(\text{क} - \text{ख})$$

$$२\ \text{कोज्या क कोज्या ख} = \text{कोज्या}\,(\text{क} + \text{ख}) + \text{कोज्या}\,(\text{क} - \text{ख})$$

$$२\ \text{ज्या क ज्या ख} = \text{कोज्या}\,(\text{क} - \text{ख}) - \text{कोज्या}\,(\text{क} + \text{ख})$$

$$\text{ज्या}\,(\text{क} + \text{ख})\ \text{ज्या}\,(\text{क} - \text{ख}) = \text{ज्या}^२\,\text{क} - \text{ज्या}^२\,\text{ख}$$

$$\begin{aligned}\text{कोज्या}\,(\text{क} + \text{ख})\ \text{कोज्या}\,(\text{क} - \text{ख}) &= \text{कोज्या}^२\,\text{क} - \text{ज्या}^२\,\text{ख} \\ &= \text{कोज्या}^२\,\text{ख} - \text{ज्या}^२\,\text{क}\end{aligned}$$

$$\text{ज्या}\ २\,\text{क} = २\ \text{ज्या क कोज्या क} = \frac{२\ \text{स्प क}}{१ + \text{स्प}^२\,\text{क}}$$

$$\begin{aligned}\text{कोज्या}\ २\,\text{क} &= \text{कोज्या}^२\,\text{क} - \text{ज्या}^२\,\text{क} \\ &= १ - २\ \text{ज्या}^२\,\text{क} \\ &= २\ \text{कोज्या}^२\,\text{क} - १ \\ &= \frac{१ - \text{स्प}^२\,\text{क}}{१ + \text{स्प}^२\,\text{क}}\end{aligned}$$

$$\text{स्प}\ २\,\text{क} = \frac{२\ \text{स्प क}}{१ - \text{स्प}^२\,\text{क}}$$

$$\text{ज्या}\ ३\,\text{क} = ३\ \text{ज्या क} - ४\ \text{ज्या}^३\,\text{क}$$

कोज्या ३ क = ४ कोज्या^{3} क − ३ कोज्या क

$$\text{स्प ३ क} = \frac{\text{३ स्प क} - \text{स्प}^3\text{ क}}{\text{१} - \text{३ स्प}^2\text{ क}}$$

$$\text{ज्या}\ \frac{\text{क}}{\text{२}} = \pm\sqrt{\frac{\text{१} - \text{कोज्या क}}{\text{२}}}$$

$$\text{कोज्या}\ \frac{\text{क}}{\text{२}} = \pm\sqrt{\frac{\text{१} + \text{कोज्या क}}{\text{२}}}$$

$$\text{स्प (क + ख)} = \frac{\text{स्प क} + \text{स्प ख}}{\text{१} - \text{स्प क स्प ख}}$$

$$\text{स्प (क − ख)} = \frac{\text{स्प क} - \text{स्प ख}}{\text{१} + \text{स्प क स्प ख}}$$

(६) यदि ज्या थ = ज्या क, थ = स$\pi \pm (-१)^{\text{स}}$क

यदि कोज्या थ = कोज्या क, थ = २ स $\pi \pm$ क

यदि स्प थ = स्प क, थ = स π + क

$$(७)\quad \frac{\text{का}}{\text{ज्या क}} = \frac{\text{खा}}{\text{ज्या ख}} = \frac{\text{गा}}{\text{ज्या ग}}$$

का = खा कोज्या ग + गा कोज्या ख

$$\text{कोज्या क} = \frac{\text{खा}^2 + \text{गा}^2 - \text{का}^2}{\text{२ खा.गा}}$$

$$\text{ज्या}\ \frac{\text{क}}{\text{२}} = \sqrt{\frac{(\text{अ} - \text{खा})(\text{अ} - \text{गा})}{\text{खा.गा}}}$$

$$\text{कोज्या}\ \frac{\text{क}}{\text{२}} = \sqrt{\frac{\text{अ}(\text{अ} - \text{का})}{\text{खा.गा}}}$$

$$\text{स्प}\ \frac{\text{क}}{\text{२}} = \sqrt{\frac{(\text{अ} - \text{खा})(\text{अ} - \text{गा})}{\text{अ}(\text{अ} - \text{का})}}$$

$$\text{ज्या क} = \frac{२}{\text{खा.गा}} \sqrt{\text{अ (अ - का) (अ - खा) (अ - गा)}}$$

$$\triangle = \text{त्रिभुज का क्षेत्रफल} = \frac{१}{२} \text{खा.गा ज्या} \frac{\text{क}}{२}$$

$$= \frac{१}{२} \text{ का.गा ज्या} \frac{\text{ख}}{२} = \frac{१}{२} \text{का खा ज्या} \frac{\text{ग}}{२}$$

$$= \sqrt{\text{अ (अ - का) (अ - खा) (अ - गा)}}$$

$$\text{स्प} \frac{\text{ख - ग}}{२} = \frac{\text{खा - गा}}{\text{खा + गा}} \text{कोस्प} \frac{\text{क}}{२}$$

(८) $\text{लघु}_{\text{क}}\ १ = ०$

$$\text{लघु}_{\text{क}}\ \text{क} = १$$

$$\text{लघु}_{\text{क}}\ (\text{म न}) = \text{लघु}_{\text{क}}\ \text{म} + \text{लघु}_{\text{क}}\ \text{न}$$

$$\text{लघु}_{\text{क}} \frac{\text{म}}{\text{न}} = \text{लघु}_{\text{क}}\ \text{म} - \text{लघु}_{\text{क}}\ \text{न}$$

$$\text{लघु}_{\text{क}}\ \text{म}^{\text{न}} = \text{न लघु}_{\text{क}}\ \text{म}$$

$$\text{लघु}_{\text{क}}\ \text{म} = \text{लघु}_{\text{ख}}\ \text{म} \times \text{लघु}_{\text{क}}\ \text{ख}$$

(९) $\text{त्रा} = \frac{\text{का}}{\text{२ ज्या क}} = \frac{\text{खा}}{\text{२ ज्या ख}} = \frac{\text{गा}}{\text{२ ज्या ग}}$

$$= \frac{\text{का.खा.गा}}{४ \triangle}$$

$$\text{त्र} = \frac{\triangle}{\text{अ}} = (\text{अ - का}) \text{ स्प} \frac{\text{क}}{२}$$

$$\text{त्र}_१ = \frac{\triangle}{\text{अ - का}} = \text{अ स्प} \frac{\text{क}}{२}$$

(१०) चक्रीय चतुर्भुज का क्षेत्रफल=

$$\sqrt{(\text{अ} - \text{का})(\text{अ} - \text{खा})(\text{अ} - \text{गा})(\text{अ} - \text{घा})}$$

स भुजाओं के समबहुभुज क्षेत्र में खिंचे हुये अन्तर्वृत्त की त्रिज्या

$$= \frac{१}{२} \text{ का कोस्प} \frac{\pi}{\text{स}}$$

स भुजाओं के समबहुभुज क्षेत्र के परिगत वृत्त की त्रिज्या

$$= \frac{१}{२} \text{ का व्युज्या } \frac{\pi}{\text{स}}$$

समबहुभुज का क्षेत्रफल $= \text{स} \frac{\text{का}^{२}}{४} \text{ कोस्प} \frac{\pi}{\text{स}}$

LIST OF TECHNICAL TERMS

पारिभाषिक शब्दावली

अँग्रेज़ी	हिन्दी
Addition Formula	संकलन सूत्र
Addition Theorem	योग-नियम
Adjacent	संलग्न, आसन्न
Alternate	एकान्तर
Altitude	ऊँचाई, उन्नतांश
Ambiguous	संशयात्मक
Ambiguous case	संशयात्मक स्थिति
Analysis	विश्लेषण
Angle at the centre	केन्द्रस्थ कोण
Angle, Complementary	समपूरक कोण
Angle, Compound	संयुक्त कोण
Angle, exterior	बहिष्कोण
Angle, external	वाह्य कोण
Angle, right	समकोण
Angle, vertical	शीर्ष कोण
Angular	कोणीय
Anti-Clock-wise	वामवर्त्त
Anti-logarithm	प्रतिलघुगणक
Approximate	सन्निकट
Approximately	लगभग
Arc	चाप

Arc, circular	वृत्तीय चाप
Arithmetical Progression	समान्तर श्रेणी
Ascending order	आरोह क्रम
Axis	अक्ष
Base	आधार
Binomial Theorem	द्विपद सिद्धान्त
Bisector	द्विभाजक
Centesimal	शतांशक
Centre	केन्द्र
Centroid	गुरुत्व केन्द्र, केन्द्रव
Characteristic of a logarithm	पूर्णांश
Chord	जीवा
Circle	वृत्त
Circle, circum	परिवृत्त
Circle, escribed	बहि:वृत्त
Circle, in	अन्त:वृत्त
Circle, nine point	नव-विन्दु वृत्त
Circular	वृत्ताकार, वृत्तीय, वर्तुल
Circum-centre	परिकेन्द्र
Circumference	परिधि
Clock-wise	दक्षिणावर्त
Coincide	सन्निपतित होना
Collinear	एकरेखीय, समरेखीय
Common to all	सर्वनिष्ठ
Common to both	उभयनिष्ठ
Complementary	पूरक

Concentric	एककेन्द्रीय, समकेन्द्रक
Concurrent	एकविन्दुगामी
Concyclic	चक्रीय
Constant	स्थिर, अचल
Cosecant	व्युत्क्रमज्या
Cosec	व्युज्या
Cosine	कोटिज्या
Cos	कोज्या
Cotangent	कोटिस्पर्शज्या
Cot	कोस्प
Coversine	कोटिशरज्या
Depression	अवनतांश
Elevation	उन्नतांश
Eliminant	अपनीत
Elimination	लुप्तीकरण
Equilateral triangle	समत्रिबाहु त्रिभुज
Formula	सूत्र
General Expression	व्यापक व्यंजक
Graph	लेखाचित्र
Harmonical Progression	हरात्मक श्रेणी
Hexagon	षड्भुज
Identities	तादात्म्य
Inclined Plane	आनत धरातल
Index	घातांक
Initial line	आदि रेखा
Integer	पूर्णांक

Logarithm	लघुगणक
Mantissa	दशमलवांश
Pedal triangle	पादिक त्रिभुज, पाद
Perimeter	परिसीमा, परिमिति
Proposition	साध्य
Quadrant	पाद
Quantity	राशि
Radius	त्रिज्या
Reciprocal	व्युत्क्रम
Recurring	आवर्त
Revolving line	भ्रामक रेखा
Secant	व्युत्क्रमकोटिज्या
Sec	व्युको
Sexagesimal	षट्दशांशक
Sine	ज्या
Sin	ज्या
Solution of a triangle	त्रिभुज-निर्धारण
Sub-multiple	अपवर्त्तक
Subtraction Theorem	व्यवकलन नियम
Supplementary angle	पूरक कोण
Table	सारिणी
Tabular logarithms	सारिणिक लघुगणक
L (denoting tabular logarithms)	सालघु
Tangent (Geometry)	स्पर्श रेखा
Tangent (Trigonometry)	स्पर्शज्या
Tan	स्प

Trigonometrical function	त्रिकोणमितीय फल
Trigonometrical ratio	त्रिकोणमितीय निष्पत्ति
Trigonometry	त्रिकोणमिति
Unequal	विषम, असम
Unit	एकांक
Unknown quantity	अज्ञात राशि
Value	मान, मूल्य
Value-exponential	घातीय मान
Value-general	सार्वमान
Varies inversely	उत्क्रमानुपाती है।
Versine	शरज्या
Vertex	शीर्ष
Vertical	उर्ध्वाधर
Whole number	पूर्णाङ्क
Zero	शून्य

लघुगणकीय सारिणी, प्राकृत ज्या, प्राकृत स्पर्शज्या,
सारिणिक लघुगणकीय ज्या, सारिणिक
लघुगणकीय स्पर्शज्या, तथा कोणों के
रेडियन माप ।

सारिणी १

संख्याओं के लघुगणक

	०	१	२	३	४	५	६
१०	०००००	००४३२	००८६०	०१२८४	०१७०३	०२११९	०२५३१
११	०४१३९	०४५३२	०४९२२	०५३०८	०५६९०	०६०७०	०६४४६
१२	०७९१८	०८२७९	०८६३६	०८९९१	०९३४२	०९६९१	१००३७
१३	११३९४	११७२७	१२०५७	१२३८५	१२७१०	१३०३३	१३३५४
१४	१४६१३	१४९२२	१५२२९	१५५३४	१५८३६	१६१३७	१६४३५
१५	१७६०९	१७८९८	१८१८४	१८४६९	१८७५२	१९०३३	१९३१२
१६	२०४१२	२०६८३	२०९५२	२१२१९	२१४८४	२१७४८	२२०११
१७	२३०४५	२३३००	२३५५३	२३८०५	२४०५५	२४३०४	२४५५१
१८	२५५२७	२५७६८	२६००७	२६२४५	२६४८२	२६७१७	२६९५१
१९	२७८७५	२८१०३	२८३३०	२८५५६	२८७८०	२९००३	२९२२६
२०	३०१०३	३०३२०	३०५३५	३०७५०	३०९६३	३११७५	३१३८७
२१	३२२२२	३२४२८	३२६३४	३२८३८	३३०४१	३३२४४	३३४४५
२२	३४२४२	३४४३९	३४६३५	३४८३०	३५०२५	३५२१८	३५४११
२३	३६१७३	३६३६१	३६५४९	३६७३६	३६९२२	३७१०७	३७२९१
२४	३८०२१	३८२०२	३८३८२	३८५६१	३८७३९	३८९१७	३९०९४
२५	३९७९४	३९९६७	४०१४०	४०३१२	४०४८३	४०६५४	४०८२४
२६	४१४९७	४१६६४	४१८३०	४१९९६	४२१६०	४२३२५	४२४८८
२७	४३१३६	४३२९७	४३४५७	४३६१६	४३७७५	४३९३३	४४०९१
२८	४४७१६	४४८७१	४५०२५	४५१७९	४५३३२	४५४८४	४५६३७
२९	४६२४०	४६३८९	४६५३८	४६६८७	४६८३५	४६९८२	४७१२९
३०	४७७१२	४७८५७	४८००१	४८१४४	४८२८७	४८४३०	४८५७२
३१	४९१३६	४९२७६	४९४१५	४९५५४	४९६९३	४९८३१	४९९६९
३२	५०५१५	५०६५१	५०७८६	५०९२०	५१०५५	५११८८	५१३२२
३३	५१८५१	५१९८३	५२११५	५२२४४	५२३७५	५२५०४	५२६३४
३४	५३१४८	५३२७५	५३४०३	५३५२९	५३६५६	५३७८२	५३९०८

			मध्यमान अन्तर								
७	८	९	१	२	३	४	५	६	७	८	९
०२९३८	०३३४२	०३७४३	४२	८३	१२५	१६६	२०८	२४८	२९०	३३१	३७३
०६८१९	०७१८८	०७५५५	३८	७६	११४	१५२	१९०	२२७	२६५	३०२	३४०
१०३८०	१०७२१	११०५९	३५	७०	१०५	१४०	१७५	२०९	२४३	२७८	३१३
१३६७२	१३९८८	१४३०१	३२	६५	९७	१२९	१६२	१९३	२२५	२५८	२९०
१६७३२	१७०२६	१७३१९	३०	६०	९०	१२०	१५०	१८०	२१०	२४०	२७०
१९५९०	१९८६६	२०१४०	२८	५६	८४	११२	१४०	१६८	१९६	२२४	२५२
२२२७२	२२५३१	२२७८९	२६	५३	७९	१०५	१३२	१५८	१८४	२१०	२३७
२४७९७	२५०४२	२५२८५	२५	५०	७४	९९	१२४	१४९	१७४	१९९	२२३
२७१८४	२७४१६	२७६४६	२३	४७	७०	९४	११७	१४१	१६४	१८८	२११
२९४४७	२९६६७	२९८८५	२२	४५	६७	८९	१११	१३४	१५६	१७८	२०१
३१५९७	३१८०६	३२०१५	२१	४२	६४	८५	१०६	१२७	१४८	१७०	१९१
३३६४६	३३८४६	३४०४४	२०	४०	६१	८१	१०१	१२१	१४१	१६२	१८२
३५६०३	३५७९३	३५९८४	१९	३९	५८	७७	९७	११६	१३५	१५४	१७४
३७४७५	३७६५८	३७८४०	१९	३७	५६	७४	९३	१११	१३०	१४८	१६७
३९२७०	३९४४५	३९६२०	१८	३६	५३	७१	८९	१०७	१२४	१४२	१६०
४०९९३	४११६२	४१३३०	१७	३४	५१	६८	८५	१०२	११९	१३६	१५३
४२६५१	४२८१३	४२९७५	१६	३३	४९	६६	८२	९८	११५	१३१	१४८
४४२४८	४४४०४	४४५६०	१६	३२	४७	६३	७९	९५	१११	१२६	१४२
४५७८८	४५९३९	४६०९०	१५	३०	४६	६१	७६	९१	१०६	१२२	१३७
४७२७६	४७४२२	४७५६७	१५	२९	४४	५९	७४	८८	१०३	११८	१३२
४८७१४	४८८५५	४८९९६	१४	२९	४३	५७	७२	८६	१००	११४	१२९
५०१०६	५०२४३	५०३७९	१४	२८	४२	५५	६९	८३	९७	११०	१२५
५१४५५	५१५८७	५१७२०	१३	२७	४०	५४	६७	८०	९४	१०७	१२१
५२७६३	५२८९२	५३०२०	१३	२६	३९	५२	६५	७८	९१	१०४	११७
५४०३३	५४१५८	५४२८३	१३	२५	३८	५०	६३	७६	८८	१०१	११३

संख्याओं के लघुगणक

	०	१	२	३	४	५	६
३५	५४४०७	५४५३१	५४६६४	५४७७७	५४९००	५५०२३	५५१४५
३६	५५६३०	५५७५१	५५८७१	५५९९१	५६११०	५६२२९	५६३४८
३७	५६८२०	५६९३७	५७०५४	५७१७१	५७२८७	५७४०३	५७५१९
३८	५७९७८	५८०९२	५८२०६	५८३२०	५८४३३	५८५४६	५८६५९
३९	५९१०६	५९२१८	५९३२९	५९४३९	५९५५०	५९६६०	५९७७०
४०	६०२०६	६०३१४	६०४२३	६०५३१	६०६३८	६०७४६	६०८५३
४१	६१२७८	६१३८४	६१४९०	६१५९५	६१७००	६१८०५	६१९०९
४२	६२३२५	६२४२८	६२५३१	६२६३४	६२७३७	६२८३९	६२९४१
४३	६३३४७	६३४४८	६३५४८	६३६४९	६३७४९	६३८४९	६३९४९
४४	६४३४५	६४४४४	६४५४२	६४६४०	६४७३८	६४८३६	६४९३३
४५	६५३२१	६५४१८	६५५१४	६५६१०	६५७०६	६५८०१	६५८९६
४६	६६२७६	६६३७०	६६४६४	६६५५८	६६६५२	६६७४५	६६८३९
४७	६७२१०	६७३०२	६७३९४	६७४८६	६७५७८	६७६६९	६७७६१
४८	६८१२४	६८२१५	६८३०५	६८३९५	६८४८५	६८५७४	६८६६४
४९	६९०२०	६९१०८	६९१९७	६९२८५	६९३७३	६९४६१	६९५४८
५०	६९८९७	६९९८४	७००७०	७०१५७	७०२४३	७०३२९	७०४१५
५१	७०७५७	७०८४२	७०९२७	७१०१२	७१०९६	७११८१	७१२६५
५२	७१६००	७१६८४	७१७६७	७१८५०	७१९३३	७२०१६	७२०९९
५३	७२४२८	७२५०९	७२५९१	७२६७३	७२७५४	७२८३५	७२९१६
५४	७३२३९	७३३२०	७३४००	७३४८०	७३५६०	७३६४०	७३७१९
५५	७४०३६	७४११५	७४१९४	७४२७३	७४३५१	७४४२९	७४५०७
५६	७४८१९	७४८९६	७४९७४	७५०५१	७५१२८	७५२०५	७५२८२
५७	७५५८७	७५६६४	७५७४०	७५८१५	७५८९१	७५९६७	७६०४२
५८	७६३४३	७६४१८	७६४९२	७६५६७	७६६४१	७६७१६	७६७९०
५९	७७०८५	७७१५९	७७२३२	७७३०५	७७३७९	७७४५२	७७५२५

			मध्यमान अन्तर								
७	८	९	१	२	३	४	५	६	७	८	९
५५२६७	५५३८८	५५५०९	१२	२४	३७	४९	६१	७३	८६	९८	११०
५६४६७	५६५८५	५६७०३	१२	२४	३६	४८	६०	७१	८३	९५	१०७
५७६३४	५७७४९	५७८६४	१२	२३	३५	४६	५८	७०	८१	९३	१०४
५८७७१	५८८८३	५८९९५	११	२३	३४	४५	५७	६८	७९	९०	१०२
५९८७९	५९९८८	६००९७	११	२२	३३	४४	५५	६६	७७	८८	९९
६०९५९	६१०६६	६११७२	११	२१	३२	४३	५४	६४	७५	८६	९७
६२०१४	६२११८	६२२२१	१०	२१	३१	४२	५२	६३	७३	८४	९४
६३०४३	६३१४४	६३२४६	१०	२०	३१	४१	५१	६१	७१	८२	९२
६४०४८	६४१४७	६४२४६	१०	२०	३०	४०	५०	६०	७०	८०	९०
६५०३१	६५१२८	६५२२५	१०	२०	२९	३९	४९	५९	६८	७८	८८
६५९९२	६६०८७	६६१८१	१०	१९	२९	३८	४८	५७	६७	७६	८६
६६९३२	६७०२५	६७११७	९	१९	२८	३७	४७	५६	६५	७५	८४
६७८५२	६७९४३	६८०३४	९	१८	२७	३७	४६	५५	६४	७३	८२
६८७५३	६८८४२	६८९३१	९	१८	२७	३६	४५	५३	६२	७१	८०
६९६३६	६९७२३	६९८१०	९	१८	२६	३५	४४	५३	६१	७०	७९
७०५०१	७०५८६	७०६७२	९	१७	२६	३४	४३	५२	६०	६९	७७
७१३४९	७१४३३	७१५१७	८	१७	२५	३४	४२	५१	५९	६७	७६
७२१८१	७२२६३	७२३४६	८	१७	२५	३३	४२	५०	५८	६६	७५
७२९९७	७३०७८	७३१५९	८	१६	२४	३२	४१	४९	५७	६५	७३
७३७९९	७३८७८	७३९५७	८	१६	२४	३२	४०	४८	५६	६४	७२
७४५८६	७४६६३	७४७४१	८	१६	२३	३१	३९	४७	५५	६२	७०
७५३५८	७५४३५	७५५११	८	१५	२३	३१	३९	४६	५४	६२	६९
७६११८	७६१९३	७६२६८	८	१५	२३	३०	३८	४५	५३	६०	६८
७६८६४	७६९३८	७७०१२	७	१५	२२	३०	३७	४५	५२	५९	६७
७७५९७	७७६७०	७७७४३	७	१५	२२	२९	३७	४४	५१	५८	६६

संख्याओं के लघुगणक

	०	१	२	३	४	५	६
६०	७७८१५	७७८८७	७७९६०	७८०३२	७८१०४	७८१७६	७८२४७
६१	७८५३३	७८६०४	७८६७५	७८७४६	७८८१७	७८८८८	७८९५८
६२	७९२३९	७९३०९	७९३७९	७९४४९	७९५१८	७९५८८	७९६५७
६३	७९९३४	८०००३	८००७२	८०१४०	८०२०९	८०२७७	८०३४६
६४	८०६१८	८०६८६	८०७५४	८०८२१	८०८८९	८०९५६	८१०२३
६५	८१२९१	८१३५८	८१४२५	८१४९१	८१५५८	८१६२४	८१६९०
६६	८१९५४	८२०२०	८२०८६	८२१५१	८२२१७	८२२८२	८२३४७
६७	८२६०७	८२६७२	८२७३७	८२८०२	८२८६६	८२९३०	८२९९५
६८	८३२५१	८३३१५	८३३७८	८३४४२	८३५०६	८३५६९	८३६३२
६९	८३८८५	८३९४८	८४०११	८४०७३	८४१३६	८४१९८	८४२६१
७०	८४५१०	८४५७२	८४६३४	८४६९६	८४७५७	८४८१९	८४८८०
७१	८५१२६	८५१८७	८५२४८	८५३०९	८५३७०	८५४३१	८५४९१
७२	८५७३३	८५७९४	८५८५४	८५९१४	८५९७४	८६०३४	८६०९४
७३	८६३३२	८६३९२	८६४५१	८६५१०	८६५७०	८६६२९	८६६८८
७४	८६९२३	८६९८२	८७०४०	८७०९९	८७१५७	८७२१६	८७२७४
७५	८७५०६	८७५६४	८७६२२	८७६७९	८७७३७	८७७९५	८७८५२
७६	८८०८१	८८१३८	८८१९५	८८२५२	८८३०९	८८३६६	८८४२३
७७	८८६४९	८८७०५	८८७६२	८८८१८	८८८७४	८८९३०	८८९८६
७८	८९२०९	८९२६५	८९३२१	८९३७६	८९४३२	८९४८७	८९५४२
७९	८९७६३	८९८१८	८९८७३	८९९२७	८९९८२	९००३७	९००९१
८०	९०३०९	९०३६३	९०४१७	९०४७२	९०५२६	९०५८०	९०६३४
८१	९०८४९	९०९०२	९०९५६	९१००९	९१०६२	९१११६	९११६९
८२	९१३८१	९१४३४	९१४८७	९१५४०	९१५९३	९१६४५	९१६९८
८३	९१९०८	९१९६०	९२०१२	९२०६५	९२११७	९२१६९	९२२२१
८४	९२४२८	९२४८०	९२५३१	९२५८३	९२६३४	९२६८६	९२७३७

मध्यमान अन्तर

७	८	९	१	२	३	४	५	६	७	८	९
७८३१९	७८३९०	७८४६२	७	१४	२२	२९	३६	४३	५०	५७	६५
७९०२९	७९०९९	७९१६९	७	१४	२१	२८	३५	४२	४९	५६	६४
७९७२७	७९७९६	७९८६५	७	१४	२१	२८	३५	४२	४९	५६	६३
८०४१४	८०४८२	८०५५०	७	१४	२१	२७	३४	४१	४८	५५	६२
८१०९०	८११५८	८१२२४	७	१३	२०	२७	३४	४०	४७	५४	६०
८१७५७	८१८२३	८१८८९	७	१३	२०	२६	३३	४०	४६	५३	५९
८२४१३	८२४७८	८२५४३	७	१३	२०	२६	३३	३९	४६	५२	५९
८३०५९	८३१२३	८३१८७	६	१३	१९	२६	३२	३९	४५	५२	५८
८३६९६	८३७५९	८३८२२	६	१३	१९	२५	३२	३८	४४	५०	५७
८४३२३	८४३८६	८४४४८	६	१३	१९	२५	३१	३७	४४	५०	५६
८४९४२	८५००३	८५०६५	६	१२	१८	२५	३१	३७	४३	४९	५५
८५५५२	८५६१२	८५६७३	६	१२	१८	२४	३०	३६	४२	४९	५५
८६१५३	८६२१३	८६२७३	६	१२	१८	२४	३०	३६	४२	४८	५४
८६७४७	८६८०६	८६८६४	६	१२	१८	२४	३०	३५	४१	४७	५३
८७३३२	८७३९०	८७४४८	६	१२	१८	२३	२९	३५	४१	४७	५२
८७९१०	८७९६७	८८०२४	६	१२	१७	२३	२९	३५	४०	४६	५२
८८४८०	८८५३६	८८५९३	६	११	१७	२३	२९	३४	४०	४६	५१
८९०४२	८९०९८	८९१५४	६	११	१७	२२	२८	३४	३९	४५	५०
८९५९७	८९६५३	८९७०८	६	११	१७	२२	२८	३३	३९	४४	५०
९०१४६	९०२००	९०२५५	५	११	१६	२२	२७	३३	३८	४४	४९
९०६८७	९०७४१	९०७९५	५	११	१६	२२	२७	३२	३८	४३	४९
९१२२२	९१२७५	९१३२८	५	११	१६	२१	२७	३२	३७	४३	४८
९१७५१	९१८०३	९१८५५	५	११	१६	२१	२६	३२	३७	४२	४७
९२२७३	९२३२४	९२३७६	५	१०	१६	२१	२६	३१	३६	४२	४७
९२७८८	९२८४०	९२८९१	५	१०	१५	२१	२६	३१	३६	४१	४६

संख्याओं के लघुगणक

	०	१	२	३	४	५	६
८५	९२९४२	९२९९३	९३०४४	९३०९५	९३१४६	९३१९७	९३२४५२
८६	९३४५०	९३५००	९३५५१	९३६०१	९३६५१	९३७०२	९३७२५०
८७	९३९५२	९४००२	९४०५२	९४१०१	९४१५१	९४२०१	९९४७४३
८८	९४४४८	९४४९८	९४५४७	९४५९६	९४६४५	९४६९४	७४२
८९	९४९.३९	९४९८८	९५०३६	९५०८५	९५१३४	९५१८२	९५३१
९०	९५४२४	९५४७२	९५५२१	९५५६९	९५६१७	९५६६५	९५७१३
९१	९५९०४	९५९५२	९५९९९	९६०४७	९६०९५	९६१४२	९६१९०
९२	९६३७९	९६४२६	९६४७३	९६५२०	९६५६७	९६६१४	९६६६१
९३	९६८४८	९६८९५	९६९४२	९६९८८	९७०३५	९७०८१	९७१२८
९४	९७३१३	९७३५९	९७४०५	९७४५१	९७४९७	९७५४३	९७५८९
९५	९७७७२	९७८१८	९७८६४	९७९०९	९७९५५	९८०००	९८०४६
९६	९८२२७	९८२७२	९८३१८	९८३६३	९८४०८	९८४५३	९८४९८
९७	९८६७७	९८७२२	९८७६७	९८८११	९८८५६	९८९००	९८९४५
९८	९९१२३	९९१६७	९९२११	९९२५५	९९३००	९९३४४	९९३८८
९९	९९५६४	९९६०७	९९६५१	९९६९५	९९७३९	९९७८२	९९८२६

सारिणी २

प्राकृत ज्यायें

अँश	०′	१०′	२०′	३०′	४०′	५०′
०	०.०००००	०.००२९१	०.००५८२	०.००८७३	०.०११६४	०.०१४५४
१	.०१७४५	.०२०३६	.०२३२७	.०२६१८	.०२९०८	.०३१९९
२	.०३४९०	.०३७८१	.०४०७१	.०४३६२	.०४६५३	.०४९४३
३	.०५२३४	.०५५२४	.०५८१४	.०६१०५	.०६३९५	.०६६८५
४	.०६९७६	.०७२६६	.०७५५६	.०७८४६	.०८१३६	.०८४२६

प्राकृत कोटिज्यायें

७	८	९	मध्यमान अन्तर १	२	३	४	५	६	७	८	९
९३२९८	९३३४९	९३३९९	५	१०	१५	२०	२५	३०	३६	४१	४६
९३८०२	९३८५२	९३९०२	५	१०	१५	२०	२५	३०	३५	४०	४५
९४३००	९४३४९	९४३९९	५	१०	१५	२०	२५	३०	३५	४०	४५
९४७९२	९४८४१	९४८९०	५	१०	१५	२०	२५	२९	३४	३९	४४
९५२७९	९५३२८	९५३७६	५	१०	१५	१९	२४	२९	३४	३९	४४
९५७६१	९५८०९	९५८५६	५	१०	१४	१९	२४	२९	३४	३८	४३
९६२३७	९६२८४	९६३३२	५	९	१४	१९	२४	२९	३३	३८	४३
९६७०८	९६७५५	९६८०२	५	९	१४	१९	२४	२८	३३	३८	४२
९७१७४	९७२२०	९७२६७	५	९	१४	१९	२३	२८	३३	३७	४२
९७६३५	९७६८१	९७७२७	५	९	१४	१८	२३	२८	३२	३७	४१
९८०९१	९८१३७	९८१८२	५	९	१४	१८	२३	२७	३२	३६	४१
९८५४३	९८५८८	९८६३२	५	९	१४	१८	२३	२७	३२	३६	४१
९८९८९	९९०३४	९९०७८	४	९	१३	१८	२२	२७	३१	३६	४०
९९४३२	९९४७६	९९५२०	४	९	१३	१८	२२	२६	३१	३५	४०
९९८७०	९९९१३	९९९५७	४	९	१३	१७	२२	२६	३०	३५	३९

सारिणी २

६०′	अँश	मध्यमान अन्तर १′	२′	३′	४′	५′	६′	७′	८′	९′
०.०१७४५	८९	२९	५८	८७	११६	१४५	१७५	२०४	२३३	२६२
.०३४९०	८८	२९	५८	८७	११६	१४५	१७५	२०४	२३३	२६२
.०५२३४	८७	२९	५८	८७	११६	१४५	१७५	२०४	२३३	२६२
.०६९७६	८६	२९	५८	८७	११६	१४५	१७४	२०३	२३२	२६१
.०८७१६	८५	२९	५८	८७	११६	१४५	१७४	२०३	२३२	२६१

प्राकृत कोटिज्यायें

प्राकृत ज्यायें

अंश	०′	१०′	२०′	३०′	४०′	५०′
५	०.०८७१६	०.०९००५	०.०९२९५	०.०९५८५	०.०९८७४	०.१०१६४
६	.१०४५३	.१०७४२	.११०३१	.११३२०	.११६०९	.११८९८
७	.१२१८७	.१२४७६	.१२७६४	.१३०५३	.१३३४१	.१३६२९
८	.१३९१७	.१४२०५	.१४४९३	.१४७८१	.१५०६९	.१५३५६
९	.१५६४३	.१५९३१	.१६२१८	.१६५०५	.१६७९२	.१७०७८
१०	०.१७३६५	०.१७६५१	०.१७९३७	०.१८२२४	०.१८५०९	०.१८७९५
११	.१९०८१	.१९३६६	.१९६५२	.१९९३७	.२०२२२	.२०५०७
१२	.२०७९१	.२१०७६	.२१३६०	.२१६४४	.२१९२८	.२२२१२
१३	.२२४९५	.२२७७८	.२३०६२	.२३३४५	.२३६२७	.२३९१०
१४	.२४१९२	.२४४७४	.२४७५६	.२५०३८	.२५३२०	.२५६०१
१५	०.२५८८२	०.२६१६३	०.२६४४३	०.२६७२४	०.२७००४	०.२७२८४
१६	.२७५६४	.२७८४३	.२८१२३	.२८४०२	.२८६८०	.२८९५९
१७	.२९२३७	.२९५१५	.२९७९३	.३००७१	.३०३४८	.३०६२५
१८	.३०९०२	.३११७८	.३१४५४	.३१७३०	.३२००६	.३२२८२
१९	.३२५५७	.३२८३२	.३३१०६	.३३३८१	.३३६५५	.३३९२९
२०	०.३४२०२	०.३४४७५	०.३४७४८	०.३५०२१	०.३५२९३	०.३५५६५
२१	.३५८३७	.३६१०८	.३६३७९	.३६६५०	.३६९२१	.३७१९१
२२	.३७४६१	.३७७३०	.३७९९९	.३८२६८	.३८५३७	.३८८०५
२३	.३९०७३	.३९३४१	.३९६०८	.३९८७५	.४०१४२	.४०४०८
२४	.४०६७४	.४०९३९	.४१२०४	.४१४६९	.४१७३४	.४१९९८
२५	०.४२२६२	०.४२५२५	०.४२७८८	०.४३०५१	०.४३३१३	०.४३५७५
२६	.४३८३७	.४४०९८	.४४३५९	.४४६२०	.४४८८०	.४५१४०
२७	.४५३९९	.४५६५८	.४५९१७	.४६१७५	.४६४३३	.४६६९०
२८	.४६९४७	.४७२०४	.४७४६०	.४७७१६	.४७९७१	.४८२२६
२९	.४८४८१	.४८७३५	.४८९८९	.४९२४२	.४९४९५	.४९७४८

प्राकृत कोटिज्यायें

मध्यमान अन्तर

६०′	अँश	१′	२′	३′	४′	५′	६′	७′	८′	९
०.१०४५३	८४	२९	५८	८७	११६	१४५	१७४	२०३	२३२	२६१
.१२१८७	८३	२९	५८	८७	११६	१४५	१७४	२०३	२३२	२६१
.१३९१७	८२	२९	५८	८७	११६	१४५	१७३	२०२	२३१	२६०
.१५६४३	८१	२९	५८	८६	११५	१४४	१७३	२०२	२३०	२५९
.१७३६५	८०	२९	५७	८६	११५	१४४	१७२	२०१	२३०	२५८
०.१९०८१	७९	२९	५७	८६	११५	१४४	१७२	२०१	२२९	२५८
.२०७९१	७८	२९	५७	८६	११४	१४३	१७१	२००	२२८	२५७
.२२४९५	७७	२८	५७	८५	११४	१४२	१७०	१९९	२२७	२५६
.२४१९२	७६	२८	५७	८५	११३	१४१	१७०	१९८	२२६	२५५
.२५८८२	७५	२८	५६	८५	११३	१४१	१६९	१९७	२२६	२५४
०.२७५६४	७४	२८	५६	८४	११२	१४०	१६८	१९६	२२४	२५२
.२९२३७	७३	२८	५६	८४	११२	१४०	१६७	१९५	२२३	२५१
.३०९०२	७२	२८	५६	८३	१११	१३९	१६६	१९४	२२२	२५०
.३२५५७	७१	२८	५५	८३	११०	१३८	१६६	१९३	२२१	२४८
.३४२०२	७०	२७	५५	८२	११०	१३७	१६४	१९२	२१९	२४७
०.३५८३७	६९	२७	५५	८२	१०९	१३७	१६४	१९१	२१८	२४६
.३७४६१	६८	२७	५४	८१	१०८	१३६	१६३	१९०	२१७	२४४
.३९०७३	६७	२७	५४	८१	१०८	१३५	१६१	१८८	२१५	२४२
.४०६७४	६६	२७	५३	८०	१०७	१३४	१६०	१८७	२१४	२४०
.४२२६२	६५	२७	५३	८०	१०६	१३३	१५९	१८६	२१२	२३८
०.४३८३७	६४	२६	५२	७९	१०५	१३१	१५७	१८४	२१०	२३६
.४५३९९	६३	२६	५२	७८	१०४	१३०	१५६	१८२	२०८	२३४
.४६९४७	६२	२६	५२	७७	१०३	१२९	१५५	१८१	२०६	२३२
.४८४८१	६१	२६	५१	७७	१०२	१२८	१५४	१७९	२०४	२३०
.५००००	६०	२५	५१	७६	१०१	१२७	१५२	१७७	२०२	२२८

प्राकृत कोटिज्यायें

प्राकृत ज्यायें

अंश	०′	१०′	२०′	३०′	४०′	५०′
३०	०.५००००	०.५०२५२	०.५०५०३	०.५०७५४	०.५१००४	०.५१२५४
३१	.५१५०४	.५१७५३	.५२००२	.५२२५०	.५२४९८	.५२७४५
३२	.५२९९२	.५३२३८	.५३४८४	.५३७३०	.५३९७५	.५४२२०
३३	.५४४६४	.५४७०८	.५४९५१	.५५१९४	.५५४३६	.५५६७८
३४	.५५९१९	.५६१६०	.५६४०१	.५६६४१	.५६८८०	.५७११९
३५	०.५७३५८	०.५७५९६	०.५७८३३	०.५८०७०	०.५८३०७	०.५८५४३
३६	.५८७७९	.५९०१४	.५९२४८	.५९४८२	.५९७१६	.५९९४९
३७	.६०१८२	.६०४१४	.६०६४५	.६०८७६	.६११०७	.६१३३७
३८	.६१५६६	.६१७९५	.६२०२४	.६२२५१	.६२४७९	.६२७०६
३९	.६२९३२	.६३१५८	.६३३८३	.६३६०८	.६३८३२	.६४०५६
४०	०.६४२७९	०.६४५०१	०.६४७२३	०.६४९४५	०.६५१६६	०.६५३८६
४१	.६५६०६	.६५८२६	.६६०४४	.६६२६२	.६६४८०	.६६६९७
४२	.६६९१३	.६७१२९	.६७३४४	.६७५५९	.६७७७३	.६७९८७
४३	.६८२००	.६८४१२	.६८६२४	.६८८३५	.६९०४६	.६९२५६
४४	.६९४६६	.६९६७५	.६९८८३	.७००९१	.७०२९८	.७०५०४
४५	०.७०७११	०.७०९१६	०.७११२१	०.७१३२५	०.७१५२९	०.७१७३२
४६	.७१९३४	.७२१३६	.७२३३७	.७२५३७	.७२७३७	.७२९३७
४७	.७३१३५	.७३३३३	.७३५३१	.७३७२८	.७३९२४	.७४१२०
४८	.७४३१४	.७४५०९	.७४७०३	.७४८९६	.७५०८८	.७५२८०
४९	.७५४७१	.७५६६१	.७५८५१	.७६०४१	.७६२२९	.७६४१७
५०	०.७६६०४	०.७६७९१	०.७६९७७	०.७७१६२	०.७७३४७	०.७७५३१
५१	.७७७१५	.७७८९७	.७८०७९	.७८२६१	.७८४४२	.७८६२२
५२	.७८८०१	.७८९८०	.७९१५८	.७९३३५	.७९५१२	.७९६८८
५३	.७९८६४	.८००३८	.८०२१२	.८०३८६	.८०५५८	.८०७३०
५४	.८०९०२	.८१०७२	.८१२४२	.८१४१२	.८१५८०	.८१७४८

प्राकृत कोटिज्यायें

६०′		मध्यमान अन्तर १′	२′	३′	४′	५′	६′	७′	८′	९′
०.५१५०४	५९	२५	५०	७५	१००	१२५	१५०	१७५	२००	२२५
.५२९९२	५८	२५	५०	७४	९९	१२४	१४९	१७४	१९८	२२३
.५४४६४	५७	२५	४९	७४	९८	१२३	१४७	१७२	१९६	२२१
.५५९१९	५६	२४	४९	७३	९७	१२२	१४६	१७०	१९४	२१९
.५७३५८	५५	२४	४८	७२	९६	१२०	१४४	१६८	१९२	२१६
०.५८७७९	५४	२४	४७	७१	९५	११९	१४२	१६६	१९०	२१३
.६०१८२	५३	२३	४७	७०	९४	११७	१४०	१६४	१८७	२११
.६१५६६	५२	२३	४६	७०	९२	११६	१३९	१६२	१८५	२०८
.६२९३२	५१	२३	४६	६८	९१	११४	१३७	१५९	१८२	२०५
.६४२७९	५०	२२	४५	६७	९०	११२	१३५	१५७	१७९	२०२
०.६५६०६	४९	२२	४४	६६	८८	१११	१३३	१५५	१७७	१९९
.६६९१३	४८	२२	४४	६५	८७	१०९	१३१	१५३	१७४	१९६
.६८२००	४७	२१	४३	६४	८६	१०७	१२९	१५०	१७२	१९३
.६९४६६	४६	२१	४२	६३	८४	१०६	१२७	१४८	१६९	१९०
.७०७११	४५	२१	४२	६२	८३	१०४	१२४	१४५	१६६	१८७
०.७१९३४	४४	२०	४१	६१	८२	१०२	१२२	१४३	१६३	१८४
.७३१३५	४३	२०	४०	६०	८०	१००	१२०	१४०	१६०	१८०
.७४३१४	४२	२०	३९	५९	७८	९८	११८	१३८	१५७	१७७
.७५४७१	४१	१९	३९	५८	७७	९६	११६	१३५	१५४	१७३
.७६६०४	४०	१९	३८	५७	७६	९५	११३	१३२	१५१	१७०
०.७७७१५	३९	१९	३७	५६	७४	९३	१११	१३०	१४८	१६७
.७८८०१	३८	१८	३६	५४	७२	९१	१०९	१२७	१४५	१६३
.७९८६४	३७	१८	३५	५३	७१	८९	१०६	१२४	१४२	१५९
.८०९०२	३६	१७	३५	५२	६९	८७	१०४	१२१	१३८	१५६
.८१९१५	३५	१७	३४	५१	६८	८५	१०१	११८	१३५	१५२

प्राकृत कोटिज्यायें

प्राकृत ज्यायें

अँश	०′	१०′	२०′	३०′	४०′	५०′
५५	०.८१९१५	०.८२०८२	०.८२२४८	०.८२४१३	०.८२५७७	०.८२७४१
५६	.८२९०४	.८३०६६	.८३२२८	.८३३८९	.८३५४९	.८३७०८
५७	.८३८६७	.८४०२५	.८४१८२	.८४३३९	.८४४९५	.८४६५०
५८	.८४८०५	.८४९५९	.८५११२	.८५२६४	.८५४१६	.८५५६७
५९	.८५७१७	.८५८६६	.८६०१५	.८६१६३	.८६३१०	.८६४५७
६०	०.८६६०३	०.८६७४८	०.८६८९२	०.८७०३६	०.८७१७८	०.८७३२१
६१	.८७४६२	.८७६०३	.८७७४३	.८७८८२	.८८०२०	.८८१५८
६२	.८८२९५	.८८४३१	.८८५६६	.८८७०१	.८८८३५	.८८९६८
६३	.८९१०१	.८९२३२	.८९३६३	.८९४९३	.८९६२३	.८९७५२
६४	.८९८७९	.९०००७	.९०१३३	.९०२५९	.९०३८३	.९०५०७
६५	०.९०६३१	०.९०७५३	०.९०८७५	०.९०९९६	०.९१११६	०.९१२३६
६६	.९१३५५	.९१४७२	.९१५९०	.९१७०६	.९१८२२	.९१९३६
६७	.९२०५०	.९२१६४	.९२२७६	.९२३८८	.९२४९९	.९२६०९
६८	.९२७१८	.९२८२७	.९२९३५	.९३०४२	.९३१४८	.९३२५३
६९	.९३३५८	.९३४६२	.९३५६५	.९३६६७	.९३७६९	.९३८६९
७०	०.९३९६९	०.९४०६८	०.९४१६७	०.९४२६४	०.९४३६१	०.९४४५७
७१	.९४५५२	.९४६४६	.९४७४०	.९४८३२	.९४९२४	.९५०१५
७२	.९५१०६	.९५१९५	.९५२८४	.९५३७२	.९५४५९	.९५५४५
७३	.९५६३०	.९५७१५	.९५७९९	.९५८८२	.९५९६४	.९६०४६
७४	.९६१२६	.९६२०६	.९६२८५	.९६३६३	.९६४४०	.९६५१७
७५	०.९६५९३	०.९६६६७	०.९६७४२	०.९६८१५	०.९६८८७	०.९६९५९
७६	.९७०३०	.९७१००	.९७१६९	.९७२३७	.९७३०४	.९७३७१
७७	.९७४३७	.९७५०२	.९७५६६	.९७६३०	.९७६९२	.९७७५४
७८	.९७८१५	.९७८७५	.९७०३४	.९७९९२	.९८०५०	.९८१०७
७९	.९८१६३	.९८२१८	.९८२७२	.९८३२५	.९८३७८	.९८४३०

प्राकृत कोटिज्यायें

मध्यमान अन्तर

६०′	अंश	१′	२′	३′	४′	५′	६′	७′	८′	९′
०.८२९०४	३४	१६	३३	४९	६६	८२	९९	११५	१३२	१४८
.८३८६७	३३	१६	३२	४८	६४	८०	९६	११२	१२८	१४४
.८४८०५	३२	१६	३१	४७	६३	७८	९४	११०	१२५	१४१
.८५७१७	३१	१५	३०	४६	६१	७६	९१	१०६	१२२	१३७
.८६६०३	३०	१५	३०	४४	५९	७४	८९	१०३	११८	१३३
०.८७४६२	२९	१४	२९	४३	५७	७२	८६	१००	११४	१२९
.८८२९५	२८	१४	२८	४२	५५	६९	८३	९७	१११	१२५
.८९१०१	२७	१३	२७	४०	५४	६७	८१	९४	१०८	१२१
.८९८७९	२६	१३	२६	३९	५२	६५	७८	९१	१०४	११७
.९०६३१	२५	१३	२५	३८	५०	६३	७५	८८	१००	११३
०.९१३५५	२४	१२	२४	३६	४८	६०	७२	८४	९६	१०८
.९२०५०	२३	१२	२३	३५	४६	५८	७०	८१	९३	१०४
.९२७१८	२२	११	२२	३३	४५	५६	६७	७८	८९	१००
.९३३५८	२१	११	२१	३२	४३	५३	६४	७५	८५	९६
.९३९६९	२०	१०	२०	३१	४१	५१	६१	७१	८१	९२
०.९४५५२	१९	१०	१९	२९	३९	४९	५८	६८	७८	८७
.९५१०६	१८	९	१८	२८	३७	४६	५५	६४	७५	८३
.९५६३०	१७	९	१८	२६	३५	४४	५२	६१	७०	७९
.९६१२६	१६	८	१७	२५	३३	४१	५०	५८	६६	७४
.९६५९३	१५	८	१६	२३	३१	३९	४७	५४	६२	७०
०.९७०३०	१४	७	१५	२२	२९	३६	४४	५१	५८	६५
.९७४३७	१३	७	१४	२०	२७	३४	४१	४७	५४	६१
.९७८१५	१२	६	१३	१९	२५	३२	३८	४४	५०	५७
.९८१६३	११	६	१२	१७	२३	२९	३५	४१	४६	५२
.९८४८१	१०	५	११	१६	२१	२७	३२	३७	४२	४८

प्राकृत कोटिज्यायें

प्राकृत ज्यायें

अंश	०′	१०′	२०′	३०′	४०′	५०′
८०	०.९८४८१	०.९८५३१	०.९८५८०	०.९८६२९	०.९८६७६	०.९८७२३
८१	.९८७६९	.९८८१४	.९८८५८	.९८९०२	.९८९४४	.९८९८६
८२	.९९०२७	.९९०६७	.९९१०६	.९९१४४	.९९१८२	.९९२१९
८३	.९९२५५	.९९२९०	.९९३२४	.९९३५७	.९९३९०	.९९४२१
८४	.९९४५२	.९९४८२	.९९५११	.९९५४०	.९९५६७	.९९५९४
८५	०.९९६१९	०.९९६४४	०.९९६६८	०.९९६९२	०.९९७१४	०.९९७३६
८६	.९९७५६	.९९७७६	.९९७९५	.९९८१३	.९९८३१	.९९८४७
८७	.९९८६३	.९९८७८	.९९८९२	.९९९०५	.९९९१७	.९९९२९
८८	.९९९३९	.९९९४९	.९९९५८	.९९९६६	.९९९७३	.९९९७९
८९	.९९९८५	.९९९८९	.९९९९३	.९९९९६	.९९९९८	१.०००००
९०	१.०००००					

प्राकृत कोटिज्यायें

सारिणी ३

प्राकृत स्पर्शज्यायें

अंश	०′	१०′	२०′	३०′	४०′	५०′
०	०.०००००	०.००२९१	०.००५८२	०.००८७३	०.०११६४	०.०१४५५
१	.०१७४६	.०२०३७	.०२३२८	.०२६१९	.०२९१०	.०३२०१
२	.०३४९२	.०३७८३	.०४०७५	.०४३६६	.०४६५८	.०४९४९
३	.०५२४१	.०५५३३	.०५८२४	.०६११६	.०६४०८	.०६७००
४	.०६९९३	.०७२८५	.०७५७८	.०७८७०	.०८१६३	.०८४५६
५	०.०८७४९	०.०९०४२	०.०९३३५	०.०९६२९	०.०९९२३	०.१०२१६
६	.१०५१०	.१०८०५	.११०९९	.११३९४	.११६८८	.११९८३
७	.१२२७८	.१२५७४	.१२८६९	.१३१६५	.१३४६१	.१३७५८
८	.१४०५४	.१४३५१	.१४६४८	.१४९४५	.१५२४३	.१५५४०
९	.१५८३८	.१६१३७	.१६४३५	.१६७३४	.१७०३३	.१७३३३

प्राकृत ज्यायें

६०′	अंश	मध्यमान अन्तर								
		१′	२′	३′	४′	५′	६′	७′	८′	९′
०.९८७६९	९	५	१०	१४	१९	२४	२९	३४	३८	४३
.९९०२७	८	४	९	१३	१७	२२	२६	३०	३४	३९
.९९२५५	७	४	८	११	१५	१९	२३	२७	३०	३४
.९९४५२	६	३	७	१०	१३	१७	२०	२३	२६	३०
.९९६१९	५	३	६	८	११	१४	१७	२०	२२	२५
०.९९७५६	४	२	५	७	९	१२	१४	१६	१८	२१
.९९८६३	३	२	४	५	७	९	११	१३	१४	१६
.९९९३९	२	१	३	४	५	७	८	९	१०	१२
.९९९८५	१									
१.०००००	०									

प्राकृत कोटिज्यायें

सारिणी ३

प्राकृत स्पर्शज्यायें

६०′	अंश	मध्यमान अन्तर								
		१′	२′	३′	४′	५′	६′	७′	८′	९′
०.०१७४६	८९	२९	५८	८७	११६	१४६	१७५	२०४	२३३	२६२
.०३४९२	८८	२९	५८	८७	११६	१४६	१७५	२०४	२३३	२६२
.०५२४१	८७	२९	५८	८७	११६	१४६	१७५	२०४	२३३	२६२
.०६९९३	८६	२९	५८	८८	११७	१४६	१७५	२०४	२३४	२६३
.०८७४९	८५	२९	५८	८८	११७	१४६	१७५	२०४	२३४	२६३
०.१०५१०	८४	२९	५९	८८	११८	१४७	१७६	२०६	२३५	२६५
.१२२७८	८३	२९	५९	८८	११८	१४७	१७६	२०६	२३५	२६५
.१४०५४	८२	३०	५९	८९	११८	१४८	१७८	२०७	२३७	२६६
.१५८३८	८१	३०	५९	८९	११९	१४९	१७८	२०८	२३८	२६७
.१७६३३	८०	३०	६०	९०	१२०	१५०	१७९	२०९	२३९	२६९
०′										

अँश	०′	१०′	२०′	३०′	४०′	५०′
१०	०.१७६३३	.१७९३३	०.१८२३३	.१८५३४	.१८८३५	०.१९१३६
११	.१९४३८	.१९७४	.२००४२	.२३४५	.२०६४८	.२०९५२
१२	.२१२५६	.२१५६	.२१८६४	.२२१६९	.२२४७५	.२२७८१
१३	.२३०८७	.२३३९३	.२३७००	.२४००८	.२४३१६	.२४६२४
१४	.२४९३३	.२५२४२	.२५५५२	.२५८६२	.२६१७२	.२६४८३
१५	०.२६७९५	०.२०१०७	०.२७४१९	०.२७७३२	०.२८०४६	०.२८३६०
१६	.२८६७५	.२८९९०	.२९३०५	.२९६२१	.२९९३८	.३०२५५
१७	.३०५७३	.३०८९१	.३१२१०	.३१५३०	.३१८५०	.३२१७१
१८	.३२४९२	.३२८१४	.३३१३६	.३३४६०	.३३७८३	.३४१०८
१९	.३४४३३	.३४७५८	.३५०८५	.३५४१२	.३५७४०	.३६०६८
२०	०.३६३९७	०.३६७२७	०.३७०५७	०.३७३८८	०.३७७२०	०.३८०५३
२१	.३८३८६	.३८७२१	.३९०५५	.३९३९१	.३९७२७	.४००६५
२२	.४०४०३	.४०७४१	.४१०८१	.४१४२१	.४१७६३	.४२१०५
२३	.४२४४७	.४२७९१	.४३१३६	.४३४८१	.४३८२८	.४४१७५
२४	.४४५२३	.४४८७२	.४५२२२	.४५५७३	.४५९२४	.४६२७७
२५	०.४६६३१	०.४६९८५	.०४७३४१	०.४७६९८	०.४८०५५	०.४८४१४
२६	.४८७७३	.४९१३४	.४९४९५	.४९८५८	.५०२२२	.५०५८७
२७	.५०९५३	.५१३२०	.५१६८८	.५२०५७	.५२४२७	.५२७९८
२८	.५३१७१	.५३५४५	.५३९२०	.५४२९६	.५४६७३	.५५०५१
२९	.५५४३१	.५५८१२	.५६१९४	.५६५७७	.५६९६२	.५७३४८
३०	०.५७७३५	०.५८१२४	०.५८५१३	०.५८९०५	०.५९२९७	०.५९६९१
३१	.६००८६	.६०४८३	.६०८८१	.६१२८०	.६१६८१	.६२०८३
३२	.६२४८७	.६२८९२	.६३२९९	.६३७०७	.६४११७	.६४५२८
३३	.६४९४१	.६५३५५	.६५७७१	.६६१८९.	.६६६०८	.६७०२८
३४	.६७४५१	.६७८७५	.६८३०१	.६८७२८	.६९१५७	.६९५८८
	६०′	५०′	४०′	३०′	२०′	१०′

प्राकृत कोटिस्पर्शज्यायें

		मध्यमान अन्तर								
६०′	अंश	१′	२′	३′	४′	५′	६′	७′	८′	९′
०.१९४३८	७९	३०	६०	९०	१२०	१५१	१८१	२११	२४१	२७१
.२१२५६	७८	३०	६१	९१	१२१	१५२	१८२	२१२	२४२	२७३
.२३०८७	७७	३१	६१	९२	१२२	१५३	१८३	२१४	२४४	२७५
.२४९४३	७६	३१	६२	९२	१२३	१५४	१८५	२१६	२४६	२७७
.२६७९५	७५	३१	६२	९३	१२४	१५५	१८६	२१७	२४८	२७९
०.२८६७५	७४	३१	६३	९४	१२५	१५७	१८८	२१९	२५०	२८२
.३०५७३	७३	३२	६३	९५	१२६	१५८	१९०	२२१	२५३	२८५
.३२४९२	७२	३२	६४	९६	१२८	१६०	१९२	२२४	२५६	२८८
.३४४३३	७१	३२	६५	९७	१२९	१६२	१९४	२२६	२५९	२९१
.३६३९७	७०	३३	६५	९८	१३१	१६४	१९६	२२९	२६२	२९४
०.३८३८६	६९	३३	६६	१००	१३३	१६६	१९९	२३२	२६५	२९८
.४०४०३	६८	३४	६७	१०१	१३४	१६८	२०२	२३६	२६९	३०२
.४२४४७	६७	३४	६८	१०२	१३६	१७०	२०५	२३९	२७३	३०६
.४४५२३	६६	३५	६९	१०४	१३८	१७३	२०८	२४२	२७७	३११
.४६६३१	६५	३५	७०	१०५	१४०	१७६	२११	२४६	२८१	३१६
०.४८७७३	६४	३६	७१	१०७	१४३	१७९	२१४	२५०	२८६	३२१
.५०९५३	६३	३६	७३	१०९	१४५	१८२	२१८	२५४	२९१	३२७
.५३१७१	६२	३७	७४	१११	१४८	१८५	२२२	२५९	२९६	३३३
.५५४३१	६१	३८	७५	११३	१५१	१८९	२२६	२६४	३०२	३३९
.५७७३५	६०	३८	७७	११५	१५४	१९२	२३०	२६९	३०७	३४६
०.६००८६	५९	३९	७८	११८	१५७	१९६	२३५	२७४	३१३	३५३
.६२४८७	५८	४०	८०	१२०	१६०	२००	२४०	२८०	३२०	३६०
.६४९४१	५७	४१	८२	१२३	१६४	२०५	२४५	२८६	३२७	३६८
.६७४५१	५६	४२	८४	१२६	१६७	२०९	२५१	२९३	३३४	३७६
.७००२१	५५	४३	८६	१२८	१७१	२१४	२५७	३००	३४२	३८५
०′		प्राकृत कोटिस्पर्शज्यायें								

अंश	०′	१०′	२०′	३०′	४०′	५०′
३५	०.७००२१	०.७०४५५	०.७०८९१	०.७१३२९	०.७१७६९	०.७२२११
३६	.७२६५४	.७३१००	.७३५४७	.७३९९६	.७४४४७	.७४९००
३७	.७५३५५	.७५८१२	.७६२७२	.७६७३३	.७७१९६	.७७६६१
३८	.७८१२९	.७८५९८	.७९०७०	.७९५४४	.८००२०	.८०४९८
३९	.८०९७८	.८१४६१	.८१९४६	.८२४३४	.८२९२३	.८३४१५
४०	०.८३९१०	०.८४४०७	०.८४९०६	०.८५४०८	०.८५९१२	०.८६४१९
४१	.८६९२९	.८७४४१	.८७९५५	.८८४७३	.८८९९२	.७९५१५
४२	.९००४०	.९०५६९	.९१०९९	.५१६३३	.९२१७०	.९२७०९
४३	.९३२५२	.९३७९७	.९४३४५	.७४८९६	.९५४५१	.९६००८
४४	.९६५६९	.९७१३३	.९७७००	.९८२७०	.९८८४३	.९९४२०
४५	१.०००००	१.००५८३	१.०११७०	१.०१७६१	१.०२३५५	१.०२९५२
४६	.०३५५३	.०४१५८	.०४७६६	.०५३७८	.०५९९४	.०६६१३
४७	.०७२३७	.०७८६४	.०८४९६	.०९१३१	.०९७७०	.१०४१४
४८	.११०६१	.११७१३	.१२३६९	.१३०२९	.१३६९४	.१४३६३
४९	.१५०३७	.१५७१५	.१६३९८	.१७०८५	.१७७७७	.१८४७४
५०	१.१९१७५	१.१९८८२	१.२०५९३	१.२१३१०	१.२२०३१	१.२२७५८
५१	.२३४९०	.२४२२७	.२४९६९	.२५७१७	.२६४७१	.२७२३०
५२	.२७९९४	.२८७६४	.२९५४१	.३०३२३	.३१११०	.३१९०४
५३	.३२७०४	.३३५११	.३४३२३	.३५१४२	.३५९६८	.३६८००
५४	.३७६३८	.३८४८४	.३९३३६	.४०१९५	.४१०६१	.४१९३४
५५	१.४२८१५	१.४३७०३	१.४४५९८	१.४५५०१	१.४६४११	१.४७३३०
५६	.४८२५६	.४९१९०	.५०१३३	.५१०८४	.५२०४३	.५३०१०
५७	.५३९८७	.५४९७२	.५५९६६	.५६९६९	.५७९८१	.५९००२
५८	.६००३३	.६१०७४	.६२१२५	.६३१८५	.६४२५६	.६५३३७
५९	.६६४२८	.६७५३०	.६८६४३	.६९७६६	.७०९०१	.७२०४७
	६०′	५०′	४०′	३०′	२०′	१०′

प्राकृत कोटिस्पर्शज्यायें

मध्यमान अन्तर

६०′	अंश	१′	२′	३′	४′	५′	६′	७′	८′	९′
०.७२६५४	५४	४४	८८	१३२	१७६	२२०	२६३	३०७	३५१	३९५
.७५३५५	५३	४५	९०	१३५	१८०	२२५	२७०	३१५	३६०	४०५
.७८१२९	५३	४६	९२	१३९	१८५	२३१	२७७	३२४	३७०	४१६
.८०९७८	५१	४८	९५	१४३	१९०	२३८	२८५	३३३	३८०	४२८
.८३९१०	५०	४९	९८	१४७	१९६	२४२	२९३	२४२	३९१	४४०
०.८६९२९	४९	५०	१०१	१५१	२०१	२५२	३०२	३५२	४०२	४५३
.९००४०	४८	५२	१०४	१५६	२०८	२६०	३११	३६३	४१५	४६७
.९३२५२	४७	५४	१०७	१६१	२१४	२६८	३२१	३७५	४२९	४८२
.९६५६९	४६	५५	१११	१६६	२२१	२७७	३३२	३८७	४४२	४९८
१.०००००	४५	५७	११४	१७२	२२९	२८६	३४३	४००	४५७	५१५
१.०३५५३	४४	५९	११८	१७८	२३७	२९६	३५५	४१४	४७४	५३३
.०७२३७	४३	६१	१२३	१८४	३४६	३०७	३६८	४३०	४९१	५५३
.११०६१	४२	६४	१२७	१९१	२५५	३१९	३८२	४४६	५१०	५७३
.१५०३७	४१	६६	१३२	१९९	२६३	३३२	३९७	४६३	५३०	५९६
.१९१७५	४०	६९	१३८	२०७	२७६	३४५	४१३	४८२	५५२	६२०
१.२३४९०	३९	७२	१४४	२१६	२८८	३६०	४३१	५०३	५७५	६४७
.२७९९४	३८	७५	१५०	२२५	३००	३७६	४५१	५२६	६०१	६७६
.३२७०४	३७	७८	१५७	२३५	३१४	३९२	४७१	५४९	६२८	७०७
.३७६३८	३६	८२	१६४	२४७	३२९	४११	४९३	५७६	६३८	७४०
.४२८१५	३५	८६	१७२	२५९	३४५	४३१	५१७	६०३	६९०	७७६
१.४८२५६	३४	९१	१८१	२७२	३६३	४५३	५४४	६३४	७२५	८१६
.५३९८७	३३	९६	१९१	२४७	३८२	४७८	५७३	६६९	७६४	८६०
.६००३३	३२	१०१	२०१	३०२	४०३	५०४	६०४	७०५	८०६	९०७
.६६४२८	३१	१०७	२१३	३२०	४२६	५३३	६३९	७४६	८५२	९५९
.७३२०५	३०	११३	२२६	३३९	४५१	५६५	६७७	७९०	९०३	१०१६
०′		प्राकृत कोटिस्पर्शज्यायें								

अंश	०′	१०′	२०′	३०′	४०′	५०′
६०	१.७३२१	१.७४३७	१.७५५६	१.७६७५	१.७७९६	१.७९१७
६१	१.८०४०	१.८१६५	१.८२९१	१.८४१८	१.८५४६	१.८६७६
६२	१.८८०७	१.८९४०	१.९०७४	१.९२१०	१.९३४७	१.९४८६
६३	१.९६२६	१.९७६८	१.९९१२	१.००५७	१.०२०४	१.३५०३
६४	२.०५०३	२.०६५५	२.०८०९	२.०९६५	२.११२३	२·१२८३
६५	२.१४४५	२.१६०९	२.१७७५	२.१९४३	२.२११३	२.२२८६
६६	२.२४६०	२.२६३७	२.२८१७	२.२९९८	२.३१८३	२.३३६९
६७	२.३५५९	२.३७५०	२.३९४५	२.४१४२	२.४३४२	२.४५४५
६८	२.४७५१	२.४९६०	२.५१७२	२.५३८६	२.५६०५	२.५८२६
६९	२.६०५१	२.६२७९	२.६५११	२.६७४६	२.६९८५	२.७२२८
७०	२.७४७५	२.७७२५	२.७९८०	२.८२३९	२.८५०२	२.८७७०
७१	२.९०४२	२.९३१९	२.९६००	२.९८८७	३.०१७८	३.०४७५
७२	३.०७७७	३.१०८४	३.१३९७	३.१७१६	३.२०४१	३.२३७१
७३	३.२७०९	३.३०५२	३.३४०२	३.३७५९	३.४१२४	३.४४९५
७४	३.४८७४	३.५२६१	३.५६५६	३.६०५९	३.६४७०	३.६८९१
७५	३.७३२१	३.७७६०	३.८२०८	३.८६६७	३.९१३६	३.९६१७
७६	४.०१०८	४.०६११	४.११२६	४.१६५३	४.२१९३	४.२७४७
७७	४.३३१५	४.३८९७	४.४४९४	४.५१०७	४.५७३६	४.६३८२
७८	४.७०४६	४.७७२९	४.८४३०	४.९१५२	४.९८९४	५.०६५८
७९	५.१४४६	५.२२५७	५.३०९३	५.३९५५	५.४८४५	५.५७६४
८०	५.६७१३	५.७६९४	५.८७०८	५.९७५८	६.०८४४	६.१९७०
८१	६.३१३८	६.४३४८	६.५६०६	६.६९१२	६.८२६९	६.९६८२
८२	७.११५४	७.२६८७	७.४२८७	७.५९५८	७.७७०४	७.९५३०
८३	८.१४४३	८.३४५०	८.५५५५	८.७७६९	९.००९८	९.२५५३
८४	९.५१४४	९.७८८२	१०.०७८	१०.३८५	१०.७१२	११.०५९
	६०′	५०′	४०′	३०′	२०′	१०′

प्राकृत कोटिस्पर्शज्यायें

		मध्यमान अन्तर								
६०	अंश	१′	२′	३′	४′	५′	६′	७′	८′	९′
१.८०४०	२९	१२	२४	३६	४८	३६	७२	८४	९६	१०८
१.८८०७	२८	१३	२५	३८	५१	६४	७७	८९	१०२	११५
१.९६२६	२७	१४	२७	४१	५४	६८	८२	९५	१०९	१२२
२.०५०३	२६	१५	२९	४४	५८	७३	८८	१०२	११७	१३१
२.१४४५	२५	१६	३१	४७	६३	७९	९४	११०	१२६	१४१
२.२४६०	२४	१७	३४	५१	६८	८५	१०१	११८	१३५	१५२
२.३५५९	२३	१८	३७	५५	७३	९२	११०	१२८	१४६	१६५
२.४७५१	२२	२०	४०	६०	८०	१००	११९	१३९	१५९	१७९
२.६०५१	२१	२२	४३	६५	८७	१०९	१३०	१५२	१७४	१९५
२.७४७५	२०	२४	४७	७१	९५	११९	१४२	१६६	१९०	२१३
२.९०४२	१९	२६	५२	७८	१०४	१३१	१५७	१८३	२०९	२३५
३.०७७७	१८	२९	५८	८७	११६	१४५	१७४	२०२	२३१	२६०
३.२७०९	१७	३२	६४	९७	१२९	१६१	१९३	२२५	२५८	२९०
३.४८७४	१६	३६	७२	१०८	१४४	१८१	२१६	२५३	२८९	३२५
३.७३२१	१५	४१	८१	१२२	१६३	२०४	२४४	२८५	३२६	३६६
४.०१०८	१४	४६	९३	१३९	१८५	२३२	२७८	३२५	३७१	४१८
४.३३१५	१३	५३	१०७	१६०	२१४	२६७	३२०	३७४	४२७	४८१
४.७०४६	१२	६२	१२४	१८६	२४८	३११	३७३	४३५	४९७	५५९
५.१४४६	११	७३	१४६	२२०	२९३	३६६	४३९	५१२	५८६	६५९
५.६७१३	१०	८८	१७५	२६३	३५०	४३८	५२६	६१३	७०१	७८८
६.३१३८	९	यहाँ अन्तर इतने वेग से बढ़ते हैं कि उनकी गणना नहीं की जा सकती								
७.११५४	८									
८.१४४३	७									
९.५१४४	६									
११.४३०१	५									
०′										

प्राकृत कोटिस्पर्शज्यायें

अंश	०′	१०′	२०′	३०′	४०′	५०′
८५	११.४३०	११.८२६	१२.२५१	१२.७०६	१३.१९७	१३.७२७
८६	१४.३०१	१४.९२४	१५.६०५	१६.३५०	१७.१६९	१८.०७५
८७	१९.०८१	२०.२०६	२१.४७०	२२.९०४	२४.५४२	२६.४३२
८८	२८.६३६	३१.२४२	३४.३६८	३८.१८८	४२.९६४	४९.१०४
८९	५७.२९०	६८.७५०	८५.९४०	११४.५९	१७.१८९	३४३.७७
९०	$+\infty$					
	६०′	५०′	४०′	३०′	२०′	१०′

प्राकृत कोटिस्पर्शज्यायें

सारिणी ४

सारिणिक लघुगणकीय ज्यायें

अंश	०′	१०′	२०′	३०′	४०′	५०′
०	$-\infty$	७.४६३७३	७.४६४७५	७.९४०८४	८.०६५७८	८.१६२६८
१	८.२४१८६	८.३०८७९	८.३६६७८	८.४१७९२	८.४६३६६	८.५०५०४
२	८.५४२८२	८.५७७५७	८.६०९७३	८.६३९६८	८.६६७६९	८.६९४००
३	८.७१८८०	८.७४२२६	८.७६४५१	८.७८५६८	८.८०५८५	८.८२५१३
४	८.८४३५८	८.८६१२८	०.८७८२९	८.८९४६४	८.९१०४०	८.९२५६१
५	८.९४०३०	८.९५४५०	८.९६८२५	८.९८१५७	८.९९४५०	९.००७०४
६	९.०१९२३	९.०३१०९	९.०४२६२	९.०५३८६	९.०६४८१	९.०७५४८
७	९.०८५८९	९.०९६०६	९.१०५९९	९.११५७०	९.१२५१९	९.१३४४७
८	९.१४३५६	९.१५२४५	९.१६११६	९.१६९७०	९.१७८०७	९.१८६२८
९	९.१९४३३	९.२०२२३	९.२०९९९	९.२१७६१	९.२२५०९	९.२३२४४
१०	९.२३०६७	९.२४६७७	९.२५३७६	९.२६०६३	९.२६७३९	९.२७४०५
११	.२८०६०	.२८७०५	.२९३४०	.२९९६६	.३०५८२	.३११८९
१२	.३१७८८	.३२३७८	.३२९६०	.३३५३४	.३४१००	.३४६५८
१३	.३५२०९	.३५७५२	.३६२८९	.३६८१९	.३७३४१	.३७८५८
१४	.३८३६८	.३८८७१	.३९३६९	.३९८६०	.४०३४६	.४०८२५
	६०′	५०′	४०′	३०′	२०′	१०′

सारिणिक लघुगणकीय कोटिज्यायें

मध्यमान अन्तर

९०′	अंश	१′	२′	३′	४′	५′	६′	७′	८′	९′
१४.३०१	४									
१९.०८१	३									
२८.६३६	२									
५७.२९०	१									
+∞	०									

किसी अधिक छोटे कोण न′ की कोटिस्पर्शज्या अथवा ९० —न′ की स्पर्शज्या लगभग ३४३७.७÷न के बराबर होती है।

प्राकृत कोटिस्पर्शज्यायें

सारिणी ४

सारिणिक लघुगणकीय ज्यायें

मध्यमान अन्तर

९०′	अंश	१′	२′	३′	४′	५′	६′	७′	८′	९′
८.२४१८६	८९									
८.५४२८२	८८									
८.७१८८०	८७									
८.८४३५८	८६									
८.९४०३०	८५									
९.०१९२३	८४									
९.०८५८९	८३									
९.१४३५६	८२	९६	१९२	२८८	३८४	४८०	५७६	६७२	७६८	८६४
९.१९४३३	८१	८५	१६९	२५४	३३८	४२३	५०७	५९२	६७६	७६१
९.२३९६७	८०	७६	१५१	२२७	३०२	३७८	४५३	५२९	६०४	६८०
९.२८०६०	७९	६८	१३६	२०४	२७२	३४१	४०९	४७७	५४५	६१३
.३१७८८	७८	६२	१२४	१८६	२४८	३१०	३७३	४३५	४९७	५५९
.३५२०९	७७	५७	११४	१७१	२२८	२८५	३४२	३९९	४५६	५१३
.३८३६८	७६	५३	१०५	१५८	२१०	२६३	३१६	३६८	४२१	४७३
.४१३००	७५	४९	९८	१४७	१९५	२४४	२९३	३४२	३९१	४४०
०′										

यहाँ अन्तर इतने वेग से बढ़ते हैं कि उनकी गणना नहीं की जा सकती। कोण न′ के लिए तो लघुज्या न′ अथवा लघुकोज्या (९०—न′) = लघुन + ४.८६३७३.

सारिणिक लघुगणकीय कोटिज्यायें

अंश	०′	१०′	२०′	३०′	४०′	५०′
१५	९.४१३००	९.४१७६८	९.४२२३२	९.४२६९०	९.४३१४३	९.४३५९१
१६	.४४०३४	.४४४७२	.४४९०५	.४५३३४	.४५७५८	.४६१७८
१७	.४६५९४	.४७००५	.४७४११	.४७८१४	.४८२१३	.४८६०७
१८	.४८९९८	.४९३८५	.४९७६८	.५०१४८	.५०५२३	.५०८९६
१९	.५१२६४	.५१६२९	.५१९९१	.५२३५०	.५२७०५	.५३०५६
२०	९.५३४०५	९.५३७५१	९.५४०९३	९.५४४३३	९.५४७६९	९.५५१०२
२१	.५५४३३	.५५७६१	.५६०८५	.५६४०८	.५६७२७	.५७०४४
२२	.५७३५८	.५७६६९	.५७९७८	.५८२८४	.५८५८८	.५८८८९
२३	.५९१८८	.५९४८४	.५९७७८	.६००७०	.६०३५९	.६०६४६
२४	.६०९३१	.६१२१४	.६१४९४	.६१७७३	.६२०४९	.६२३२३
२५	९.६२५९५	९.६२८६५	९.६३१३३	९.६३३९८	९.६३६६२	९.६३९२४
२६	.६४१८४	.६४४४२	.६४६९८	.६४९५३	.६५२०५	.६५४५६
२७	.६५७०५	.६५९५२	.६६१९७	.६६४४१	.६६६८२	.६६९२२
२८	.६७१६१	.६७३९८	.६७६३३	.६७८६६	.६८०९८	.६८३२८
२९	.६८५५७	.६८७८४	.६९०१०	.६९२३४	.६९४५६	.६९६७७
३०	९.६९८९७	९.७०११५	९.७०३३२	९.७०५४७	९.७०७६१	९.७०९७३
३१	.७११८४	.७१३९३	.७१६०२	.७१८०९	.७२०१४	.७२२१८
३२	.७२४२१	.७२६२२	.७२८२३	.७३०२२	.७३२१९	.७३४१६
३३	.७३६११	.७३८०५	.७३९९७	.७४१८९	.७४३७९	.७४५६८
३४	.७४७५६	.७४९४३	.७५१२८	.७५३१३	.७५४९६	.७५६७८
३५	९.७५८५९	९.७६०३९	९.७६२१८	९.७६३९५	९.७६५७२	९.७६७४७
३६	.७६९२२	.७७०९५	.७७२६८	.७७४३९	.७७६०९	.७७७७८
३७	.७७९४६	.७८११३	.७८२८०	.७८४४५	.७८६०९	.७८७७२
३८	.७८९३४	.७९०९५	.७९२५६	.७९४१५	.७९५७३	.७९७३१
३९	.७९८८७	.८००४३	.८०१९७	.८०३५१	.८०५०४	.८०६५६
	६०′	५०′	४०′	३०′	२०′	१०′

सारिणिक लघुगणकीय कोटिज्यायें

६०,	अंश	मध्यमान अन्तर १′	२′	३′	४′	५′	६′	७′	८′	९′
.४४०३४	७४	४६	९१	१३७	१८२	२२८	२७३	३१९	३६४	४१०
.४६५९४	७३	४३	८५	१२८	१७१	२१३	२५६	२९९	३४१	३८४
.४८९९८	७२	४०	८०	१२०	१६०	२०१	२४१	२८१	३२१	३६१
.५१२६४	७१	३८	७६	११३	१५१	१८९	२२७	२६४	३०२	३४०
.५३४०५	७०	३६	७१	१०७	१४३	१७९	२१४	२५०	२८५	३२१
९.५५४३३	६९	३४	६८	१०१	१३५	१६९	२०३	२३७	२७०	३०४
.५७३५८	६८	३२	६४	९६	१२८	१६१	१९३	२२५	२५७	२८९
.५९१८८	६७	३१	६१	९२	१२२	१५३	१८३	२१४	२४४	२७५
.६०९३१	६६	२९	५८	८७	११६	१४६	१७५	२०४	२३३	२६२
.६२५९५	६५	२८	५६	८३	१११	१३९	१६६	१९५	२२२	२५०
९.६४१८४	६४	२७	५३	८०	१०६	१३३	१५९	१८६	२१२	२३९
.६५७०५	६३	२५	५१	७६	१०२	१२७	१५२	१७८	२०३	२२९
.६७१६१	६२	२४	४९	७३	९७	१२२	१४६	१७०	१९४	२१९
.६८५५७	६१	२३	४७	७०	९३	११७	१४०	१६३	१८६	२१०
.६९८९७	६०	२२	४५	६७	८९	११२	१३४	१५६	१७९	२०१
९.७११८४	५९	२२	४३	६५	८६	१०७	१२९	१५०	१७२	१९३
.७२४२१	५८	२१	४१	६२	८२	१०३	१२४	१४४	१६५	१८५
.७३६११	५७	२०	४०	५९	७९	९९	११९	१३९	१५९	१७८
.७४७५६	५६	१९	३८	५७	७६	९६	११५	१३४	१५३	१७२
.७५८५९	५५	१८	३७	५५	७४	९२	११०	१२९	१४७	१६५
९.७६९२२	५४	१८	३५	५३	७१	८९	१०६	१२४	१४२	१५९
.७७९४६	५३	१७	३४	५१	६८	८६	१०३	१२०	१३७	१५४
.७८९३४	५२	१७	३३	५०	६६	८३	९९	११६	१३२	१४९
.७९८८७	५१	१६	३२	४८	६४	८०	९५	११२	१२७	१४३
.८०८०७	५०	१५	३१	४६	६२	७७	९२	१०८	१२३	१३८
०′		सारिणिक लघुगणकीय कोटिज्यायें								

अंश	०′	१०′	२०′	३०′	४०′	५०′
४०	९.८०८०७	९.८०९५७	९.८११०६	९.८१२५४	९.८१४०२	९.८१५४९
४१	.८१६९४	.८१८३९	.८१९८३	.८२१२६	.८२२६९	.८२४१०
४२	.८२५५१	.८२६९१	.८२८३०	.८२९६८	.८३१०६	.८३२४२
४३	.८३३७८	.८३५१३	.८३६४८	.८३७८१	.८३९१४	.८४०४६
४४	.८४१७७	.८४३०८	.८४४३७	.८४५६६	.८४६९४	.८४८२२
४५	९.८४९४९	९.८५०७४	९.८५२००	९.८५३२४	९.८५४४८	९.८५५७१
४६	.८५६९३	.८५८१५	.८५९३६	.८६०५६	.८६१७६	.८६२९५
४७	.८६४१३	.८६५३०	.८६६४७	.८६७६३	.८६८७९	.८६९९३
४८	.८७१०७	.८७२२१	.८७३३४	.८७४४६	.८७५५७	.८७६६८
४९	.८७७७८	.८७८८७	.८७९९६	.८८१०५	.८८२१२	.८८३१९
५०	९.८८४२५	९.८८५३१	९.८८६३६	९.८८७४१	९.८८८४४	९.८८९४८
५१	.८९०५०	.८९१५२	.८९२५४	.८९३५४	.८९४५५	.८९५५४
५२	.८९६५३	.८९७५२	.८९८४९	.८९९४७	.९००४३	.९०१३९
५३	.९०२३५	.९०३३०	.९०४२४	.९०५१८	.९०६११	.९०७०४
५४	.९०७९६	.९०८८७	.९०९७८	.९१०६९	.९११५८	.९१२४८
५५	९.९१३३६	९.९१४२५	९.९१५१२	९.९१५९९	९.९१६८६	९.९१७७२
५६	.९१८५७	.६१९४२	.९२०१७	.९२१११	.९२१९४	.९२२७७
५७	.९२३५९	.९२४४१	.९२५२२	.९२६०३	.९२६८३	.९२७६३
५८	.९२८४२	.९२९२१	.९२९९९	.९३०७७	.९३१५४	.९३२३०
५९	.९३३०७	.९३३८२	.९३४५७	.९३५३२	.९३६०६	.९३६८०
६०	९.९३७५३	९.९३८२६	९.९३८९८	९.९३९७०	९.९४०४१	९.९४११२
६१	.९४१८२	.९४२५२	.९४३२१	.९४३९०	.९४४५८	.९४५२६
६२	.९४५९३	.९४६६०	.९४७२७	.९४७९३	.९४८५८	.९४९२३
६३	.९४९८८	.९५०५२	.९५११६	.९५१७९	.९५२४२	.९५३०४
६४	.९५३६६	.९५४२७	.९५४८८	.९५५४९	.९५६०९	.९५६६८
	६०′	५.:′	४०′	३०′	२०′	१०′

सारिणिक लघुगणकीय कोटिज्यायें

मध्यमान अन्तर

६०′	अंश	१′	२′	३′	४′	५′	६′	७′	८′	९′
९.८१९९४	४९	१५	३०	४४	५९	७४	८९	१०४	११८	१३३
.८२५५१	४८	१४	२९	४३	५७	७२	८६	१००	११४	१२९
.८३३७८	४७	१४	२८	४१	५५	६९	८३	९७	११०	१२४
.८४१७७	४६	१३	२७	४०	५३	६७	८०	९३	१०६	१२०
.८४९४९	४५	१३	२६	३८	५१	६४	७७	९०	१०२	११५
९.८५६९३	४४	१२	२५	३७	५०	६२	७४	८७	९९	११२
.८६४१३	४३	१२	२४	३६	४८	६०	७२	८४	९६	१०८
.८७१०७	४२	१२	२३	३५	४६	५८	७०	८१	९३	१०४
.८७७७८	४१	११	२२	३४	४५	५६	६७	७८	८९	१००
.८८४२५	४०	११	२२	३२	४३	५४	६५	७६	८६	९७
९.८९०५०	३९	१०	२१	३१	४२	५२	६२	७३	८३	९४
.८९६५३	३८	१०	२०	३०	४०	५०	६०	७०	८०	९०
.९०२३५	३७	१०	१९	२९	३९	४९	५८	६८	७८	८७
.९०७९६	३६	९	१९	२८	३७	४७	५६	६५	७५	८४
.९१३३६	३५	९	१८	२७	३६	४५	५४	६३	७२	८१
९.९१८५७	३४	९	१७	२६	३५	४४	५२	६१	७०	७८
.९२३५९	३३	८	१७	२५	३४	४२	५०	५९	६७	७६
.९२८४२	३२	८	१६	२४	३२	४१	४९	५७	६५	७३
.९३३०७	३१	८	१६	२३	३१	३९	४७	५५	६२	७०
.९३७५३	३०	८	१५	२३	३०	३७	४५	५२	६०	६७
९.९४१८२	२९	७	१४	२२	२९	३६	४३	५०	५७	६४
.९४५९३	२८	७	१४	२१	२७	३४	४१	४८	५५	६२
.९४९८८	२७	७	१३	२०	२६	३३	४०	४६	५३	५९
.९५३६६	२६	६	१३	१९	२५	३२	३८	४४	५०	५७
.९५७२८	२५	६	१२	१८	२४	३०	३६	४२	४८	५४
०′		सारिणिक लघुगणकीय कोटिज्याय								

अंश	०′	१०′	२०′	३०′	४०′	५०′
६५	६.६५७२८	६.६५७८६	६.६५८४४	६.६५६०२	६.६५६६०	६.६६०१७
६६	.६६०७३	.६६१२६	.६६१८५	.६६२४०	.६६२६४	.६६३४६
६७	.६६४०३	.६६४५६	.६६५०६	.६६५६२	.६६६१४	.६६६६५
६८	.६६७१७	.६६७६७	.६६८१८	.६६८६८	.६६६१७	.६६६६६
६६	.६७०१५	.६७०६३	.६७१११	.६७१५६	.६७२०६	.६७२५२
७०	६.६७२६६	६.६७३४४	६.६७३६०	६.६७४३५	६.६७४७६	६.६७५२३
७१	.६७५६७	.६७६१०	.६७६५३	.६७६६६	.६७७३८	.६७७७६
७२	.६७८२१	.६७८६१	.६७६०२	.६७६४२	.६७६८२	.६८०२१
७३	.६८०६०	.६८०६८	.६८१३६	.६८१७४	.६८२११	.६८२४८
७४	.६८२८४	.६८३२०	.६८३५६	.६८३६१	.६८४२६	.६८४६०
७५	६.६८४६४	६.६८५२८	६.६८५६१	६.६८५६४	६.६८६२७	६.६८६५६
७६	.६८६६०	.६८७२२	.६८७५३	.६८७८३	.६८८१३	.६८८४३
७७	.६८८७२	.६८६०१	.६८६३०	.६८६५८	.६८६८६	.६६०१३
७८	.६६०४०	.६६०६७	.६६०६३	.६६११६	.६६१४५	.६६१७०
७६	.६६१६५	.६६२१६	.६६२४३	.६६२६७	.६६२६०	.६६३१३
८०	६.६६३३५	६.६६३५७	६.६६३७६	६.६६४००	६.६६४२१	६.६६४४२
८१	.६६४६२	.६६४८२	.६६५०१	.६६५२०	.६६५३६	.६६५५७
८२	.६६५७५	.६६५६३	.६६६१०	.६६६२७	.६६६४३	.६६६५६
८३	.६६६७५	.६६६६०	.६६७०५	.६६७२०	.६६७३४	.६६७४८
८४	.६६७६१	.६६७७५	.६६८८७	.६६८००	.६६८१२	.६६८२३
८५	६.६६८३४	६.६६८४५	६.६६८५६	६.६६८६६	६.६६८७६	६.६६८८५
८६	.६६८६४	.६६६०३	.६६६११	.६६६१६	.६६६२६	.६६६३४
८७	.६६६४०	.६६६४७	.६६६५३	.६६६५६	.६६६६४	.६६६६६
८८	.६६६७४	.६६६७८	.६६६८२	.६६६८५	.६६६८८	.६६६६१
८६	.६६६६३	.६६६६५	.६६६६७	.६६६६८	.६६६६६	१.०००००
६०	१०.०००००					
	६०′	५०′	४०	३०′	२०′	१०′

सारिणिक लघुगणकाब कोटिज्यायें

६०	अंश	मध्यमान अन्तर १'	२'	३'	४'	५'	६'	७'	८'	९'
९.९०३७३	२४	६	१२	१७	२३	२९	३५	४०	४६	५२
.९६४०३	२३	६	११	१७	२२	२८	३३	३८	४४	५०
.९६७१७	२२	५	१०	१६	२१	२६	३१	३६	४२	४७
.९७०१५	२१	५	१०	१५	२०	२५	२९	३४	४०	४४
.९७२९९	२०	५	९	१४	१९	२४	२८	३३	३८	४२
९.९७५६७	१९	४	९	१३	१८	२२	२७	३१	३६	४०
.९७८२१	१८	४	९	१३	१७	२१	२६	३०	३४	३८
.९८०६०	१७	४	८	१२	१६	२०	२४	२८	३२	३६
.९८२८४	१६	४	८	११	१५	१९	२२	२६	३०	३४
.९८४९४	१५	४	७	११	१४	१८	२१	२५	२८	३२
९.९८६९०	१४	३	७	१०	१३	१७	२०	२३	२६	३०
.९८८७२	१३	३	६	९	१२	१५	१८	२१	२४	२७
.९९०४०	१२	३	६	८	११	१४	१७	२०	२२	२५
.९९१९५	११	३	५	८	१०	१३	१६	१८	२१	२३
.९९३३५	१०	२	५	७	९	१२	१४	१६	१९	२१
९.९९४६२	९	२	४	६	८	११	१३	१५	१७	१९
.९९५७५	८	२	४	६	८	१०	११	१३	१५	१७
.९९६७५	७	२	३	५	७	८	१०	१२	१३	१५
.९९७६१	६	१	३	४	६	७	९	१०	१२	१३
.९९८३४	५	१	३	४	५	६	८	९	१०	११
९.९९८९४	४	१	२	३	४	५	६	७	८	९
.९९९४०	३	१	२	२	३	४	५	५	६	७
.९९९७४	२	१	१	२	२	३	३	४	४	५
.९९९९३	१	०	१	१	१	२	२	२	२	३
१०.०००००	०									
०'		सारिणिक लघुगणकीय कोटिज्यायें								

सारिणी ५

सारिणिक लघुगणकीय स्पर्शज्यायें

अंश	०′	१०′	२०′	३०′	४०′	५०′
०	—∞	७.४६३७३	७.७६४७६	७.९४०८६	८.०६५८१	८.१६२७३
१	८.२४१९२	८.३०८८८	८.३६६८९	८.४१८०७	८.४६३८५	८.५०५२७
२	८.५४३०८	८.५७७८८	८.६१००९	८.६४००९	८.६६८१६	८.६९४५३
३	८.७१९४०	८.७४२९२	८.७६५२५	८.७८६४९	८.८०६७४	८.८२६१०
४	८.८४४६४	८.८६२४३	८.८७९५३	८.८९५९८	८.९११८५	८.९२७१६
५	८.९४१९५	८.९५६२७	८.९७०१३	८.९८३५८	८.९९६६२	९.००९३०
६	९.०२१६२	९.०३३६१	९.०४५२८	९.०५६६६	९.०६७७५	९.०७८५८
७	९.०८९१४	९.०९९४७	९.१०९५६	९.११९४३	९.१२९०९	९.१३८५४
८	९.१४७८०	९.१५६८८	९.१६५७७	९.१७४५०	९.१८३०६	९.१९१४६
९	९.१९९७१	९.२०७८२	९.२१५७८	९.२२३६१	९.२३१३०	९.२३८८७
१०	९.२४६३२	९.२५३६५	९.२६०८६	९.२६७९७	९.२७४९६	९.२८१८६
११	.२८८६५	.२९५३५	.३०१९५	.३०८४६	.३१४८९	.३२१२२
१२	.३२७४७	.३३३६५	.३३९७४	.३४५७६	.३५१७०	.३५७५७
१३	.३६३३६	.३६९०९	.३७४७६	.३८०३५	.३८५८९	.३९१३६
१४	.३९६७७	.४०२१२	.४०७४२	.४१२६६	.४१७८४	.४२२९७
१५	९.४२८०५	९.४३३०८	९.४३८०६	९.४४२९९	९.४४७८७	९.४५२७१
१६	.४५७५०	.४६२२४	.४६६९४	.४७१६०	.४७६२२	.४८०८०
१७	.४८५३४	.४८९८४	.४९४३०	.४९८७२	.५०३११	.५०७४६
१८	.५११७८	.५१६०६	.५२०३१	.५२४५२	.५२८७०	.५३२८५
१९	.५३६९७	.५४१०६	.५४५१२	.५४९१५	.५५३१५	.५५७१२
	६०′	५०′	४०′	३०′	२०′	१०′

सारिणिक लघुगणकीय कोटि-स्पर्शज्यायें

सारिणी ५

६०′	अंश	मध्यमान अन्तर								
		१′	२′	३′	४′	५′	६′	७′	८′	९′
८.२४१९२	८९									
८.५४३०८	८८									
८.७१९४०	८७									
८.८४४६४	८६									
८.९४१९५	८५									
९.०२१६२	८४									
९.०८९१४	८३									
९.१४७८०	८२	९८	१९५	२९३	३९१	४८८	५८६	६८४	७८२	८७९
९.१९९७१	८१	८७	१७३	२६०	३४६	४३३	५१९	६०६	६९२	७७९
९.२४६३२	८०	७८	१५५	२३३	३१०	३८८	४६६	५४३	६२१	६९८
९.२८८६५	७९	७१	१४१	२१२	२८२	३५४	४२०	४९४	५६४	६३५
.३२७४७	७८	६५	१२९	१९४	२५९	३२३	३८८	४५३	५१८	५८२
.३६३३६	७७	६०	१२०	१७९	२३९	२९९	३५९	४१९	४७८	५३८
.३९६७७	७६	५६	१११	१६७	२२२	२७८	३३४	३८९	४४५	५००
.४२८०५	७५	५२	१०४	१५६	२००	२६१	३१३	३६५	४१७	४६९
९.४५७५०	७४	४८	९८	१४७	१९६	२४५	२९४	३४३	३९२	४४२
.४८५३४	७३	४६	९३	१३९	१८६	२३२	२७८	३२५	३७१	४१८
.५११७८	७२	४४	८८	१३२	१७६	२२०	२६४	३०८	३५२	३९६
.५३६९७	७१	४२	८४	१२६	१६८	२१०	२५२	२९४	३३६	३७८
.५६१०७	७०	४०	८०	१२१	१६०	२०१	२४१	२८१	३२१	३६२
६०′										

यहाँ अन्तर इतनी बेग से बढ़ते हैं कि उनकी गणना नहीं की जा सकती। कोण न के लिए लघुस्प न′ अथवा लघुकोस्प (९०—न′) = लघु न—४.४६३७३

सारिणिक लघुगणकीय कोटिस्पर्शज्यायें

अंश	०′	१०′	२०	३०′	४०′	५०′
२०	९.५६१०७	९.५६४९८	९.५६८८७	९.५७२७४	९.५७६५८	९.५८०३९
२१	.५८४१८	.५८७९४	.५९१६८	.५९५४०	.५९९०९	.६०२७६
२२	.६०६४१	.६१००४	.६१३६४	.६१७२२	.६२०७९	.६२४३३
२३	.६२७८५	.६३१३५	.६३४८४	.६३८३०	.६४१७५	.६४५१७
२४	.६४८५८	.६५१९७	.६५५३५	.६५८७०	.६६२०४	.६६५३७
२५	९.६६८६७	९.६७१९६	९.६७५२४	९.६७८५०	९.६८१७४	९.६८४९७
२६	.६८८१८	.६९१३८	.६९४५७	.६९७७४	.७००८९	.७०४०४
२७	.७०७१७	.७१०२८	.७१३३९	.७१६४८	.७१९५५	.७२२६२
२८	.७२५६७	.७२८७२	.७३१७५	.७३४७६	.७३७७७	.७४०७७
२९	.७४३७५	.७४६७३	.७४९६९	.७५२६४	.७५५५८	.७५८५२
३०	९.७६१४४	९.७६४३५	९.७६७२५	९.७७०१५	९.७७३०३	९.७७५९१
३१	.७७८७७	.७८१६३	.७८४४८	.७८७३२	.७९०१५	.७९२९७
३२	.७९५७९	.७९८६०	.८०१४०	.८०४१९	.८०६९७	.८०९७५
३३	.८१२५२	.८१५२८	.८१८०३	.८२०७८	.८२३५२	.८२६२६
३४	.८२८९९	.८३१७१	.८३४४२	.८३७१३	.८३९८४	.८४२५४
३५	९.८४५२३	९.८४७९१	९.८५०५९	९.८५३२७	९.८५५९४	९.८५८६०
३६	.८६१२६	.८६३९२	.८६६५६	.८६९२१	.८७१८५	.८७४४८
३७	.८७७११	.८७९७४	.८८२३६	.८८४९८	.८८७५९	.८९०२०
३८	.८९२८१	.८९५४१	.८९८०१	.९००६१	.९०३२०	.९०५७८
३९	.९०८३७	.९१०९५	.९१३५३	.९१६१०	.९१८६८	.९२१२५
४०	९.९२३८१	९.९२६३८	९.९२८९४	९.९३१५०	९.९३४०६	९.९३६६१
४१	.९३९१६	.९४१७१	.९४४२६	.९४६८१	.९४९३५	.९५१९०
४२	.९५४४४	.९५६९८	.९५९५२	.९६२०५	.९६४५९	.९६७१२
४३	.९६९६६	.९७२१९	.९७४७२	.९७७२५	.९७९७८	.९८२३१
४४	.९८४८४	.९८७३७	.९८९८९	.९९२४२	.९९४९५	.९९७४७
	३०′	४०′	४०′	३०′	२०′	१०′

सारिणिक लघुगणकीय कोटिस्पर्शज्यायें

६०	अंश	मध्यमान अन्तर १′	२′	३′	४′	५′	६′	७′	८′	९′
९.५८४१८	६९	३९	७७	११६	१५४	१९३	२३१	२७०	३०८	३४७
.६०६४१	६८	३७	७४	१११	१४८	१८५	२२२	२५९	२९६	३३३
.६२७८५	६७	३६	७२	१०७	१४३	१७९	२१४	२५०	२८६	३२२
.६४८५८	६६	३५	६९	१०४	१३८	१७३	२०८	२४२	२७७	३११
.६६८६७	६५	३४	६७	१०१	१३४	१६८	२०१	२३५	२६८	३०२
९.६८८१८	६४	३३	६५	९८	१३०	१६३	१९५	२२८	२६०	२९३
.७०७१७	६३	३२	६३	९५	१२६	१५८	१९०	२२१	२५३	२८४
.७२५६७	६२	३१	६२	९२	१२३	१५४	१८५	२१६	२४६	२७७
.७४३७५	६१	३०	६०	९०	१२०	१५१	१८१	२११	२४१	२७१
.७६१४४	६०	२९	५९	८८	११८	१४७	१७७	२०६	२३६	२६५
९.७७८७७	५९	२९	५८	८७	११६	१४४	१७३	२०२	२३१	२६०
.७९५७९	५८	२८	५७	८५	११३	१४२	१७०	१९८	२२७	२५५
.८१२५२	५७	२८	५६	८४	११२	१३९	१६७	१९५	२२३	२५१
.८२८९९	५६	२८	५५	८३	११०	१३७	१६५	१९२	२२०	२४७
.८४५२३	५५	२७	५४	८१	१०८	१३६	१६२	१९०	२१७	२४४
९.८६१२६	५४	२७	५४	८०	१०७	१३४	१६०	१८८	२१४	२४१
.८७७११	५३	२६	५३	७९	१०६	१३२	१५८	१८५	२१२	२३८
.८९२८१	५२	२६	५२	७८	१०५	१३१	१५७	१८३	२०९	२३६
.९०८३७	५१	२६	५२	७८	१०४	१३०	१५६	१८२	२०८	२३४
.९२३८१	५०	२६	५२	७७	१०३	१२९	१५५	१८०	२०६	२३२
९.९३९१६	४९	२६	५१	७७	१०२	१२८	१५४	१७९	२०५	२३०
.९५४४४	४८	२५	५१	७६	१०२	१२७	१५३	१७८	२०४	२२९
.९६९६६	४७	२५	५१	७६	१०१	१२७	१५२	१७७	२०३	२२८
.९८४८४	४६	२५	५१	७६	१०१	१२७	१५२	१७७	२०२	२२८
१०.०००००	४५	२५	५१	७६	१०१	१२७	१५२	१७७	२०२	२२८
०′	सारिणिक लघुगणकीय कोटिस्पर्शज्यायें									

अंश	०′	१०′	२०′	३०′	४०′
४५	१०.०००००	१०.००२५३	१०.००५०५	१०.००७५८	१०.०१०११
४६	.०१५१६	.०१७६९	.०२०२२	.०२२७५	.०२५२८
४७	.०३०३४	.०३२८८	.०३५४१	.०३७९५	.०४०४८
४८	.०४५५६	.०४८१०	.०५०६५	.०५३१९	.०५५७४
४९	.०६०८४	.०६३३९	.०६५९४	.०६८५०	.०७१०६
५०	१०.०७६१९	१०.०७८७५	१०.०८१३२	१०.०८३९०	१०.०८६४७
५१	.०९१६३	.०९४२२	.०९६८०	.०९९३९	.१०१९९
५२	.१०७१९	.१०९८०	.११२४१	.११५०२	.११७६४
५३	.१२२८९	.१२५५२	.१२८१५	.१३०७९	.१३३४४
५४	.१३८७४	.१४१४०	.१४४०६	.१४६७३	.१४९४१
५५	१०.१५४७७	१०.१५७४६	१०.१६०१६	१०.१६२८७	१०.१६५५८
५६	.१७१०१	.१७३७४	.१७६४८	.१७९२२	.१८१९७
५७	.१८७४८	.१९०२५	.१९३०३	.१९५८१	.१९८६०
५८	.२०४२१	.२०७०३	.२०९८५	.२१२६८	.२१५५२
५९	.२२१२३	.२२४०९	.२२६९७	.२२९८५	.२३२७५
६०	१०.२३८५६	१०.२४१४८	१०.२४४४२	१०.२४७३६	१०.२५०३१
६१	.२५६२५	.२५९२३	.२६२२३	.२६५२४	.२६८२५
६२	.२७४३३	.२७७३८	.२८०४५	.२८३५२	.२८६६१
६३	.२९२८३	.२९५९६	.२९९११	.३०२२६	.३०५४३
६४	.३११८२	.३१५०३	.३१८२६	.३२१५०	.३२४७६
६५	१०.३३१३३	१०.३३४६३	१०.३३७९६	१०.३४१३०	१०.३४४६५
६६	.३५१४२	.३५४८३	.३५८२५	.३६१७०	.३६५१६
६७	.३७२१५	.३७५६७	.३७९२१	.३८२७८	.३८६३६
६८	.३९३५९	.३९७२४	.४००९१	.४०४६०	.४०८३२
६९	.४१५८२	.४१९६१	.४२३४२	.४२७२६	.४३११३
	६०′	५०′	४०′	३०′	२०′

सारिणिक लघुगणकीय कोटिस्पर्शज्यायें

५०′	६०′	अंश	मध्यमानअन्तर १′	२′	३′	४′	५′	६′	७′	८′	९′
१०.०१२६३	१०.०१५१६	४४	२५	५१	७६	१०१	१२७	१५२	१७७	२०२	२२८
.०२७८१	.०३०३४	४३	२५	५१	७६	१०१	१२७	१५२	१७७	२०२	२२८
.०४३०२	.०४५५६	४२	२५	५१	७६	१०१	१२७	१५२	१७७	२०३	२२८
.०५८२९	.०६०८४	४१	२५	५१	७६	१०२	१२७	१५३	१७८	२०४	२२९
.०७३६२	.०७६१९	४०	२६	५१	७७	१०२	१२८	१५४	१७९	२०५	२३०
१०.०८९०५	१०.०९१६३	३९	२६	५२	७७	१०३	१२९	१५५	१८०	२०६	२३२
.१०४५९	.१०७१९	३८	२६	५२	७८	१०४	१३०	१५६	१८२	२०८	१३४
.१२०२६	.१२२८९	३७	२६	५२	७८	१०५	१३१	१५७	१८३	२०९	२३६
.१३६०८	.१३८७४	३६	२६	५३	७९	१०६	१३२	१५८	१८५	२१२	२३८
.१५२०९	.१५४७७	३५	२७	५४	८०	१०७	१३४	१६०	१८८	२१४	२४१
१०.१६८२९	१०.१७१०१	३४	२७	५४	८१	१०८	१३६	१६२	१९०	२१७	२४४
.१८४७२	.१८७४८	३३	२८	५५	८३	११०	१३७	१६५	१९२	२२०	२४७
.२०१४०	.२०४२१	३२	२८	५६	८४	११२	१३९	१६७	१९५	२२३	२५१
.२१८३७	.२२१२३	३१	२८	५७	८५	११३	१४२	१७०	१९८	२२७	२५५
.२३५६५	.२३८५६	३०	२९	५८	८७	११६	१४४	१७३	२०२	२३१	२६०
१०.२५३२७	१०.२५६२५	२९	२९	५९	८८	११८	१४७	१७७	२०६	२३६	२६५
.२७१२८	.२७४३३	२८	३०	६०	९०	१२०	१५१	१८१	२११	२४१	२७१
.२८९७२	.२९२८३	२७	३१	६२	९२	१२३	१५४	१८५	२१६	२४६	२७७
.३०८६२	.३११८२	२६	३२	६३	९५	१२६	१५८	१९०	२२१	२५३	२८४
.३२८०४	.३३१३३	२५	३३	६५	९८	१३०	१६३	१९५	२२८	२६०	२९३
१०.३४८०३	१०.३५१४२	२४	३४	६७	१०१	१३४	१६८	२०१	२३५	२६८	३०२
.३६८६५	.३७२१५	२३	३५	६९	१०४	१३८	१७३	२०८	२४२	२७७	३११
.३८९९६	.३९३५९	२२	३६	७२	१०७	१४३	१७९	२१४	२५१	२८६	३२२
.४१२०६	.४१५८२	२१	३७	७४	१११	१४८	१८५	२२२	२५९	२९६	३३३
.४३५०२	.४३८९३	२०	३९	७७	११६	१५४	१९३	२३१	२७०	३०८	३४७
१०′	०		सारिणिक लघुगणकीय कोटिस्पर्शज्यायें								

अंश	०′	१०′	२०′	३०′	४०′
७०	१०.४३८९३	१०.४४२८८	१०.४४६८५	१०.४५०८५	१०.४५४८८
७१	.४६३०३	.४६७१५	.४७१३०	.४७५४८	.४७९६९
७२	.४८८२२	.४९२५४	.४९६८९	.५०१२८	.५०५७०
७३	.५१४६६	.५१९२०	.५२३७८	.५२८४०	.५३३०६
७४	.५४२५०	.५४७२९	.५५२१३	.५५७०१	.५६१९४
७५	१०.५७१९५	१०.५७७०३	१०.५८२१६	१०.५८७३४	१०.५९२५८
७६	.६०३२३	.६०८६४	.६१४११	.६१९६५	.६२५२४
७७	.६३६६४	.६४२४३	.६४८३०	.६५४२४	.६६०२६
७८	.६७२५३	.६७८७८	.६८५११	.६९१५४	.६९८०५
७९	.७११३५	.७१८१४	.७२५०४	.७३२०३	.७३९१४
८०	१०.७५३६८	१०.७६११३	१०.७६८७०	१०.७७६३९	१०.७८४२२
८१	.८००२९	.८०८५४	.८१६९४	.८२५५०	.८३४२३
८२	.८५२२०	.८६१४६	.८७०९१	.८८०५७	.८९०४४
८३	.९१०८६	.९२१४२	.९३२२५	.९४३३४	.९५४७२
८४	.९७८३८	.९९०७०	११.००३३८	११.०१६४२	११.०२९८७
८५	११.०५८०५	११.०७२८४	११.०८८१५	११.१०४०२	११.१२०४७
८६	११.१५५३६	११.१७३९०	११.१९३२६	११.२१३५१	११.२३४७५
८७	११.२८०६०	११.३०५४७	११.३३१८४	११.३५९९१	११.३८९९१
८८	११.४५६९२	११.४९४७३	११.५३६१५	११.५८१९३	११.६३३११
८९	११.७५८०८	११.८३७२७	११.९३४१९	१२.०५९१४	१२.२३५२४
९०	$+\infty$				
	६०′	५०′	४०′	३०′	२०′

सारिणिक लघुगणकीय कटिस्पर्शज्यायें

मध्यमानअन्तर

५०′	६०′	अंश	१′	२′	३′	४′	५′	६′	७′	८′	९′
१०.४५८९४	१०.४६३०३	१९	४०	८०	१२१	१६०	२०१	२४१	२८१	३२१	३६२
.४८३९४	.४८८२२	१८	४२	८४	१२६	१६८	२१०	२५२	२९४	३३६	३७८
.५१०१६	.५१४६६	१७	४४	८८	१३२	१७६	२२०	२६४	३०८	३५२	३९६
.५३७७६	.५४२५०	१६	४६	९३	१३९	१८६	२३२	२७८	३२५	३७१	४१८
.५६६९२	.५७१९५	१५	४९	९८	१४७	१९६	२४५	२९४	३४३	३९२	४४२
१०.५९७८८	१०.६०३२३	१४	५२	१०४	१५६	२०८	२६१	३१३	३६५	४१७	४६९
.६३०९१	.६३६६४	१३	५६	१११	१६७	२२२	२७८	३३४	३८९	४४५	५००
.६६६३५	.६७२५३	१२	६०	१२०	१७९	२३९	२९९	३५९	४१९	४७८	५३८
.७०४६५	.७११३५	११	६५	१२९	१९४	२५९	३२३	३८८	४५३	५१८	५८२
.७४६३५	७५३६८	१०	७१	१४१	२१२	२८२	३५४	४२०	४९४	५६४	६३५
१०.७९२१८	१०.८००२९	९	७८	१५५	२३३	३१०	३८८	४६६	५४३	६२१	६९८
.८४३१२	.८५२२०	८	८७	१७३	२६०	३४६	४३३	५१९	६०६	६९२	७७९
.९००५३	.९१०८६	७	९८	१९५	२९३	३९१	४८८	५८६	६८४	७८२	८७९
.९६६३९	.९७८३८	६									
११.०४३७३	११.०५८०५	५									
११.१३७५७	११.१५५३६	४									
११.२५७०८	११.२८०६०	३									
११.४२२१२	११.४५६९२	२									
११.६९११२	११.७५८०८	१									
१२.५३६२७	+∞	०									
१०′	०′										

यहाँ अन्तर इतने बेग से बढ़ते हैं कि उनकी गणना नहीं की जा सकती ।

सारिणिक लघुगणकीय कटिस्पर्शज्यायें

सारिणी ६

वृत्तीय अथवा रेडियन माप

अंश	रेडियन	अंश	रेडियन
१	.०१७४५	२३	.४०१४३
२	.०३४९१	२४	.४१८८८
३	.०५२३६	२५	.४३६३३
४	.०६९८१	२६	.४५३७९
५	.०८७२७	२७	.४७१२४
६	.१०४७२	२८	.४८८६९
७	.१२२१७	२९	.५०६१५
८	.१३९६३	३०	.५२३६०
९	.१५७०८	३१	.५४१०५
१०	.१७४५३	३२	.५५८५१
११	.१९१९९	३३	.५७५९६
१२	.२०९९४	३४	.५९३४१
१३	.२२६८९	३५	.६१०८७
१४	.२४४३५	३६	.६२८३२
१५	.२६१८०	३७	.६४५७७
१६	.२७९२५	३८	.६६३२३
१७	.२९६७१	३९	.६८०६८
१८	.३१४१६	४०	.६९८१३
१९	.३३१६१	४१	.७१५५८
२०	.३४९०७	४२	.७३३०४
२१	.३५६५२	४३	.७५०४९
२२	.३८३९७	४४	.७६७९४

अंश	रेडियन	अंश	रेडियन
४५	.७८५४०	६८	१.१८६८२
४६	.८०२८५	६९	१.२०४२८
४७	.८२०३०	७०	१.२२१७३
४८	.८३७७६	७१	१.२३९१८
४९	.८५५२१	७२	१.२५६६४
५०	.८७२६६	७३	१.२७४०९
५१	.८९०१२	७४	१.२९१५४
५२	.९०७५७	७५	१.३०९००
५३	.९२५०२	७६	१.३२६४५
५४	.९४२४८	७७	१.३४३९०
५५	.९५९९३	७८	१.३६१३६
५६	.९७७३८	७९	१.३७८८१
५७	.९९४८४	८०	१.३९६२६
५८	१.०१२२९	८१	१.४१३७२
५९	१.०२९७४	८२	१.४३११७
६०	१.०४७२०	८३	१.४४८६२
६१	१.०६४६५	८४	१.४६६०८
६२	१.०८२१०	८५	१.४८३५३
६३	१.०९९५६	८६	१.५००९८
६४	१.११७०१	८७	१.५१८४४
६५	१.१३४४६	८८	१.५३५८९
६६	१.१५१९२	८९	१.५५३३४
६७	१.१६९३७	९०	१.५७०८०

सारिणी ६

वृत्तीय अथवा रेडियन माप

कला	रेडियन	कला	रेडियन
१	.०००२६	२३	.००६६९
२	.०००५८	२४	.००६९८
३	.०००८७	२५	.००७२७
४	.००११६	२६	.००७५६
५	.००१४५	२७	.००७८५
६	.००१७५	२८	.००८१४
७	.००२०४	२९	.००८४४
८	.००२३३	३०	.००८७३
९	.००२६२	३१	.००९०२
१०	.००२९१	३२	.००९३१
११	.००३२०	३३	.००९६०
१२	.००३४९	३४	.००९८९
१३	.००३७८	३५	.०१०१८
१४	.००४०७	३६	.०१०४७
१५	.००४३६	३७	.०१०७६
१६	.००४६५	३८	.०११०५
१७	.००४९५	३९	.०११३४
१८	.००५२४	४०	.०११६४
१९	.००५५३	४१	.०११९३
२०	.००५८२	४२	.०१२२२
२१	.००६११	४३	.०१२५१
२२	.००६४०	४४	.०१२८०
		४५	.०१३०९

वृत्तीय अथवा रेडियन माप

कला	रेडियन	विकला	रेडियन
४६	.०१३३८	५	.००००२
४७	.०१३६७	१०	.००००५
४८	.०१३९६	१५	.००००७
४९	.०१४२५	२०	.०००१०
५०	.०१४५४	२५	.०००१२
५१	.०१४८४	३०	.०००१५
५२	.०१५१३	३५	.०००१७
५३	.०१५४२	४०	.०००१९
५४	.०१५७१	४५	.०००२२
५५	.०१६००	५०	.०००२४
५६	.०१६२९	५५	.०००२७
५७	.०१६५८	६०	.०००२९
५८	.०१६८७		
५९	.०१७१६		
६०	.०१७४५		